新課程

大学への数学A

ニューアプローチ

東京大学名誉教授・明治大学教授
藤 田 宏
大東文化大学教授
長 岡 亮 介
千葉工業大学教授
長 崎 憲 一
駿台予備学校教科専任講師
長 岡 恭 史
共著

研文書院

New Approach

新課程

大学への
数学A
ニューアプローチ

New Approach

東京大学名誉教授・明治大学教授
藤 田 宏
大東文化大学教授
長 岡 亮 介
千葉工業大学教授
長 崎 憲 一
駿台予備学校教科専任講師
長 岡 恭 史
共著

研文書院

はしがき

高校数学の新しいカリキュラムに合わせて編まれた本シリーズ“大学への数学，ニューアプローチ”は，題名に含まれる二つのキー・ワードが示すように，二つの旗印を掲げている．

その第一は，数学に関して，大学受験での難関突破に自信が持てる学力を，将来の発展につながる勉強によって身につけようとする諸君のお役に立つことである．

第二に，そのような高い水準に到達するための読者の負担や苦痛が最小化され，かつ，読者の資質が順調に引き出されるようなニューアプローチ（新しい近づき方）を提供することである．

一流の大学——そこでは現代数学の研究者である教授達がその見識に基づいて数学の出題を行なう——の入試に関しては，高校数学の範囲であっても，浅薄な「技」や「術」に終始することなく，正統的な理論を理解し，筋目のただしい問題解決力を身につけることが成功への王道である．また，こうした勉強が，理科系のみならず文科系の諸専門に進む場合にも，これからの社会において重要な数学的な知性の育成につながるはずである．

“東大への解析Ⅰ，解析Ⅱ”と呼ばれた頃からの前身を辿れば，大学への数学シリーズはすでに40年に余る歴史を持っている．その間，高校カリキュラムの変更や入試の実態の変遷に応じた改善・改訂の努力は絶えず払われてきたのであるが，幸いに，大学へのシリーズにこめた，“正統的な勉学による実力の育成を”との我々の主張は，進学校の真剣な先生方の評価，および，気力と志に富んだ高校生・受験生諸君の支持を一貫して受け続けることができた．

この伝統的な長所はニューアプローチを標傍し，読者の努力が苛酷な難行苦行に消耗されないで効率良く結実するように（数学

Ｉのはしがきで述べたように）様々な工夫をこらした今回のシリーズでも確保したつもりである．

数学Ａを内容とする本書について特筆しておくべきことは，科目内の選択単元である．数と式，数列，平面幾何，計算とコンピュータの４章を正統的学習の流れにそいながらも，現在および近未来の高校での履修および入試での出題の実状に配慮して編成したことである．正規の授業では伝統的な学習になじみやすい最初の２単元に限って開講する高校が多いと思われるが，余力のある読者には本書により他の２単元（あるいはその一つ）を学習してみられることをすすめたい．実際，平面幾何は，古来学問の原型と呼ばれて来ただけの高尚さを持ち，創造的な思考力の強化に最も適した単元である．一方，コンピュータの素養は文系理系の別なく未来派の知識人の必須の武器であり，とくに数学での素朴で明快なコンピュータ利用の学習はセンター試験でそのまま役立つ‘穴場’であろうと予期されるからである．さらに，進んだ学習のために設けた第５章 発展問題 および Ｃ篇 は読者が問題解決の自信と高い視点を獲得されるのに役立つはずである．

最後に，著者の陣容に表だって名を連ねてはいないが，学識と清新さを活かして本書の重要部分に寄与された乙藤隆史さん（東京工大），元木稔さん（海城学園高校）に感謝したい．さらに，コンピュータの才に恵まれた若い友人 天野英明 君の協力は第4章の完成に貴重であった．数学Ｉのはしがきでも触れたが，社会の命運に関わる数学教育の重要性を深く認識し，正統な数学の学習を支持する参考書の刊行という難事を多年にわたって遂行して来られた，研文書院とその代表者 飯塚信之 氏に敬意を新たにするものである．

1994年　冬

藤田宏　長岡亮介　長崎憲一　長岡恭史

本書の特色

本書は，極めて個性の強い参考書であるが，その個性を短くまとめるなら，

基礎理論の解説・基本概念の説明に際しては，大学の立場に立って見てもおかしくない，きちんとしたものを与え

問題演習篇においては，真に取り組む価値のある良問を理論的・教育的配慮に基づいて体系的に精選・新作し，また〈なぜそのように解くか〉が伝わるような解答・解説をつけた

ということである．さらに，検定教科書の平板な叙述に飽きたらない読者のために，

上級の理論を視野に入れた発展的解説をもりこんだ

のも，他書にない特徴であろう．

本書の利用法

1° A基礎篇で知識を整理した後に，B篇の演習問題を解くのが普通の学習の順序であろうが，必ずしもこれにこだわる必要はない．現在の力に応じて，解けそうなB篇の問題から手をつけるのも良い方法である．

2° B演習問題の学習の理想的な形は，まず独力で問題に向かい，その結果を本書の解答と比較することである．しかし，読者の現在の実力によっては，まず，本書の解を熟読し，解法を支える基本的な考え方をしっかり理解するというのも，考えられる使い方の１つであろう．実際，本書で扱われる問題とそれに対するアプローチの考え方が理解できるだけで，大概の大学入試問題は，独力で解けるようになるはずである．

▨内容一覧▨　A 基礎理論篇

§1 数と式　□ キー・ワード …… 1

A 1. 1 実数と数直線 …… 2
A 1. 2 実数とその小数表示 …… 3
A 1. 3 実数の四則 …… 4
A 1. 4 実数の絶対値 …… 4
A 1. 5 指　数 …… 6
A 1. 6 平 方 根 …… 7
A 1. 7 平方根を含む計算 …… 7
A 1. 8 整式の基礎 …… 8
A 1. 9 整式の割算 …… 10
A 1.10 整式割算の原理とその応用 11
A 1.11 乗法および因数分解の公式 13
A 1.12 分数式とその計算 …… 13
A 1.13 式の証明 …… 16
A 1.14 不等式の基本性質 …… 19
A 1.15 絶対不等式 …… 20
A 1.16 条件と命題 …… 23
A 1.17 必要条件・十分条件 …… 28
A 1.18 論　証 …… 31

A 1.E 整　数 (A 1 への補足)
A 1.E 1 約数・倍数 …… 34
A 1.E 2 方程式の整数解(1) …… 35
A 1.E 3 方程式の整数解(2) …… 36
A 1.E 4 方程式の整数解(3) …… 37
A 1.E 5 余りに関する問題 …… 38

§2　数　列　　□ キー・ワード …… **95**

A 2. 1　数列の概念 …… **96**
A 2. 2　等差数列とその和 …… **97**
A 2. 3　等比数列とその和 …… **99**
A 2. 4　Σ記号(シグマ記号) …… **100**
A 2. 5　自然数の累乗の和 …… **102**
A 2. 6　階差数列 …… **102**
A 2. 7　数学的帰納法 …… **104**
A 2. 8　数列の帰納的定義・漸化式 …… **106**
A 2. 9　2項定理 …… **112**

§3　平面幾何　　□ キー・ワード …… **155**

A 3. 1　基本的な定理 …… **156**
A 3. 2　チェバの定理 …… **159**
A 3. 3　メネラウスの定理 …… **161**
A 3. 4　軌　跡 …… **163**
A 3. 5　図形の変換 …… **166**

§4　計算とコンピュータ　　□ キー・ワード …… **185**

A 4. 1　BASIC の基本用語 …… **186**
A 4. 2　プログラミング練習 …… **188**

▨内容一覧▨　B演習問題篇 (140題)

§1 数と式 (54題)

B.101〜B.104	無理数の計算 ……	***42***
B.105〜B.106	無理数に絡む論証 ……	***46***
B.107	絶対値記号を含む不等式 ……	***48***
B.108〜B.113	因数分解 ……	***49***
B.114〜B.117	因数定理，余りの定理の応用 ……	***55***
B.118〜B.121	式の値 ……	***61***
B.122〜B.125	条件付き等式の証明 ……	***62***
B.126〜B.128	恒等式 ……	***66***
B.129	絶対不等式の証明 (1) ……	***69***
B.130〜B.132	絶対不等式と最大・最小 ……	***70***
B.133〜B.134	絶対不等式の証明 (2) ……	***73***
B.135〜B.137	条件付き不等式の証明 ……	***76***
B.138	不等式の論証 ……	***78***
B.139〜B.142	論理と証明(必要条件・十分条件) …	***79***
B.143〜B.154	整数問題 ……	***83***

§2 数　列 (38題)

B.201〜B.203	等差数列の基礎 ……	***116***
B.204〜B.207	等比数列の基礎 ……	***119***
B.208〜B.214	その他の数列の和 (Σ記号) ……	***123***
B.215〜B.216	群数列 ……	***130***
B.217〜B.218	数列和の応用 ……	***132***
B.219〜B.222	数学的帰納法 ……	***134***
B.223〜B.232	漸化式とその応用 ……	***138***
B.233〜B.238	2項定理，多項定理 ……	***148***

§3　**平面幾何**　(18 題)

B.301〜B.318　平面幾何の必修問題 …… ***169***

§4　**計算とコンピュータ**

(本セクションは，B 篇をもたない.)

§5　**発展問題**　(30 題)

B.501〜B.504　整式に関する発展問題 …… ***218***
B.505〜B.507　不等式に関する発展問題 …… ***223***
B.508〜B.509　論理に関する発展問題 …… ***226***
B.510〜B.511　整数に関する発展問題 …… ***228***
B.512〜B.518　数列と漸化式に関する発展問題 …… ***230***
B.519〜B.523　数列と確率の融合問題 …… ***239***
B.524〜B.530　平面図形に関する発展問題 …… ***245***

▨内容一覧▨　C探究篇

C. 1　対称式と交代式 …… **254**

C. 2　連立方程式の同値変形 …… **256**

C. 3　循環小数と有理数 …… **258**

C. 4　約数と倍数 …… **259**

C. 5　互 除 法 …… **261**

C. 6　等差数列と等比数列 …… **263**

C. 7　調和数列 …… **264**

C. 8　$\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ と来て，その次の公式は？ …… **265**

C. 9　差分と和分 …… **266**

C. 10　線型漸化式の解法　(0) …… **267**

C. 11　線型漸化式の解法　(1) …… **268**
$a_{n+1}=pa_n+q(n)$ 型

C. 12　線型漸化式の解法　(2) …… **269**
$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n+r(n)$ 型

▨内容一覧▨ ◇◇◇

◇◇◇

Repos（ルポ）（フランス語で，ひとやすみの意味）

「どっちが美しいか？」 …… 41
調和数列 …… 154
「1÷3×3≠1　!?」 …… 216

◇◇◇

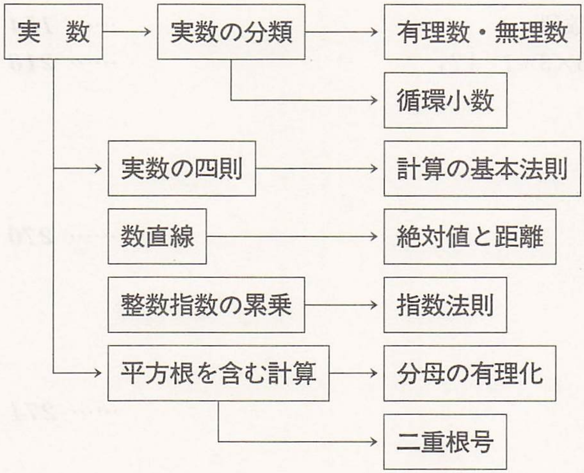
索　引 …… 270

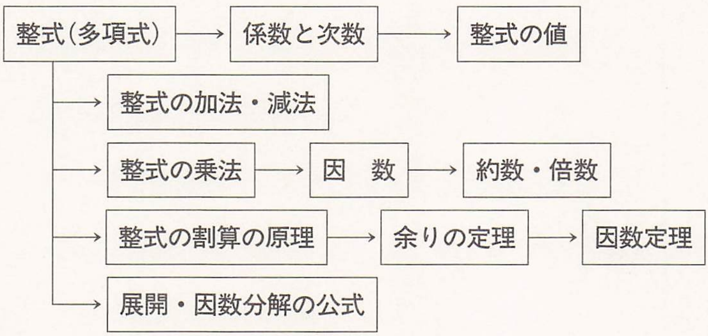
◇◇◇

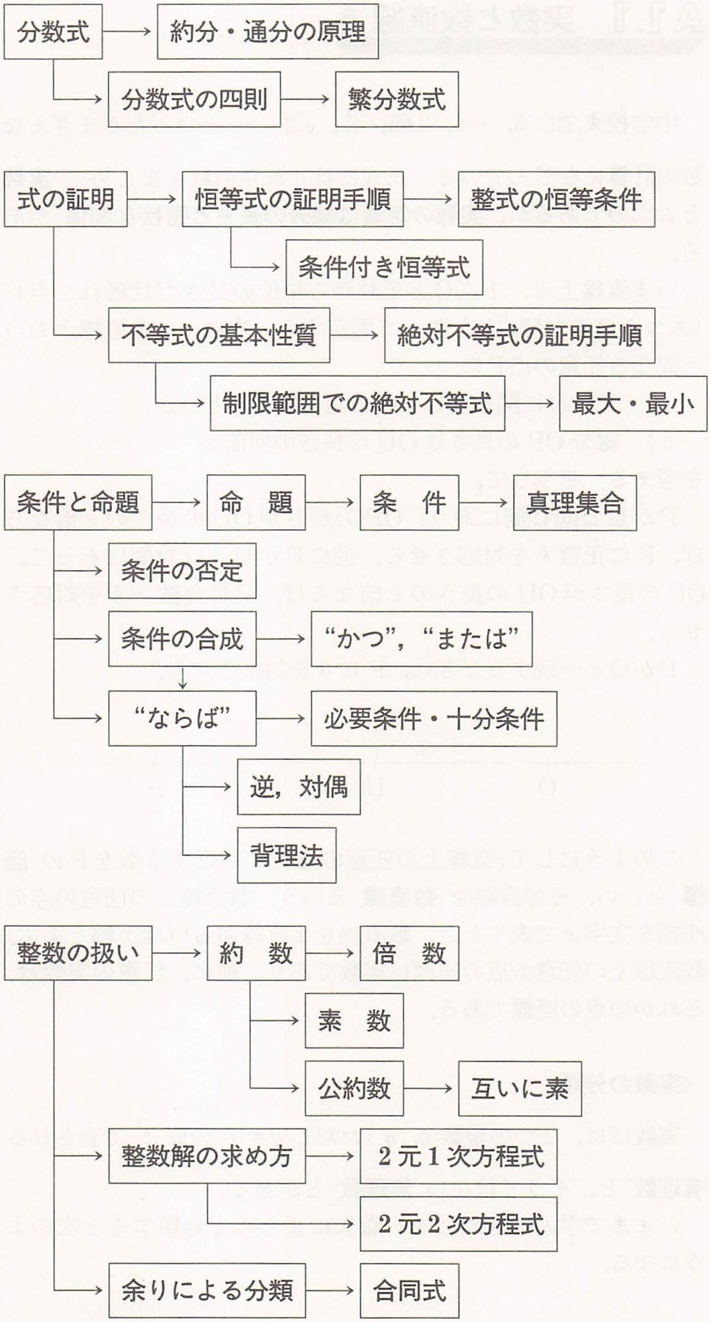
著者紹介 …… 274

§1 数と式

キー・ワード　（A基礎理論篇）






分数式
約分・通分の原理
分数式の四則
繁分数式
式の証明
恒等式の証明手順
整式の恒等条件
条件付き恒等式
不等式の基本性質
絶対不等式の証明手順
制限範囲での絶対不等式
最大・最小
条件と命題
命　題
条　件
真理集合
条件の否定
条件の合成
“かつ”，“または”
“ならば”
必要条件・十分条件
逆，対偶
背理法
整数の扱い
約　数
倍　数
素　数
公約数
互いに素
整数解の求め方
2 元 1 次方程式
2 元 2 次方程式
余りによる分類
合同式

A1.1 実数と数直線

中学校までに 5, -4, 2.65, $\dfrac{3}{7}$, $\sqrt{2}$…… といったさまざまな数の計算になじんでいる．正式にはこれらの数をまとめて **実数** とよぶのであるが，**実数の定義は線分の長さと密接な関係** がある．

いま直線上に，1点Oとそれから単位の長さだけ離れた点U（ふつうOの右側に）を取って固定する．次に，この直線上のOと異なる任意の点Pについて

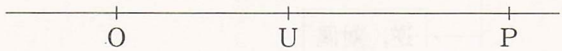
i） PはOに関してUと同じ側にあるかどうか，

ii） 線分 OP の長さは OU の長さの何倍か

を考える．そうして，

PがUと同じ側にあり，OP の長さが OU の長さの k 倍ならば，P に正数 k を対応させる．逆にPがUと反対側にあって，OP の長さが OU の長さの k 倍ならば，P に負数 $-k$ を対応させる．

PがOと一致するときは，P に 0 を対応させる．



このようにして，直線上の任意の点Pに対応する数をPの **座標** といい，その直線を **数直線** という．数直線上の任意の点の座標を文字 x で表すとき，数直線を x 直線あるいは x 軸とよぶ．数直線上の任意の点の座標は実数であり，逆に，任意の実数は，どれかの点の座標である．

〈実数の分類〉

実数には，2つの整数 p, q（ただし $q \neq 0$）の商 $\dfrac{p}{q}$ で表される **有理数** と，そうではない **無理数** とがある．

いままで学んできた数を一覧表にまとめて分類すると次のようになる．

[まとめ]

- 実数
  - 有理数
    - 整数
      - 自然数(正の整数)　1，2，3，……
      - 0
      - 負の整数　−1，−2，−3，……
    - 整数でない有理数　$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$-\frac{5}{8}$，$\frac{1}{100}$，……
  - 無理数　$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$-\sqrt{6}$，π，……

A1.2　実数とその小数表示

2.5 や 0.123 のように小数で表したとき有限の桁で終わる数，すなわち，**有限小数** は有理数である．これらの数は，たとえば，

$$2.5=\frac{25}{10}=\frac{5}{2},\qquad 0.123=\frac{123}{1000}$$

のように，必ず整数の比で表されるからである．

小数点以下に(0とは異なる)数字が限りなく現れる数を **無限小数** という．

無限小数のうちで，0.3333……… や 12.3454545……… のように，ある桁から先は有限個の同じ数字のならびがくり返して現れる数を **循環小数** という．

循環小数は有理数である．逆に有理数は有限小数あるいは循環小数で表される．

したがって，無理数を小数表示すれば循環しない無限小数となる．

以上の関係を表にまとめると次のようになる．

[まとめ]

- 実数の小数表示
  - 有限小数　（有理数）
  - 無限小数
    - 循環小数　（有理数）
    - 循環しない小数　＝　無理数

A1.3　実数の四則

任意の実数 a，b の和 $a+b$ をつくる演算を **加法** という．同様に，差 $a-b$ をつくる演算を **減法**，積 ab をつくる演算を **乗法** という．

商 $a \div b$ をつくる演算を **除法** という．このときは $b \neq 0$ とする．

加減乗除の演算をまとめて四則演算，あるいは簡単に四則という．

有理数どうしの四則演算を実際に行うことは小学校以来よく親しんできたはずである．無理数を含む実数どうしの四則演算についても，以下の基本的な計算法則が成り立つ．

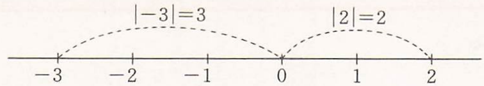
	加法	乗法
[交換法則]	$a+b=b+a$,	$ab=ba$
[結合法則]	$(a+b)+c=a+(b+c)$,	$(ab)c=a(bc)$
[分配法則]	$a(b+c)=ab+ac$	

1°　有理数どうしに四則演算をほどこした結果も有理数である．同様に，実数どうしに四則演算をほどこした結果も実数である．

A1.4　実数の絶対値

数直線上で，実数 a に対応する点Aと原点との距離を，実数 a の **絶対値** と呼び，$|a|$ で表す．

たとえば，$|-3|=3$,　$|0|=0$,　$|2|=2$.



これをいいかえると

$$|\boldsymbol{a}|=\begin{cases} \boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a}\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a}<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

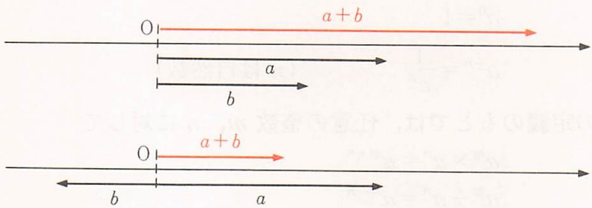
となる．すなわち，絶対値記号をはずすには中味の符号によって分類すればよい．

1°　実数 a，b が同符号ならば，点 $a+b$ の原点からの距離 $|a+b|$ は $|a|+|b|$ である．しかし，a，b が異符号ならば点 $a+b$ の原点からの距離 $|a+b|$ は $|a|+|b|$ より小さい．

したがって，任意の実数 a，b に対して

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

が成り立つ．



2°　$|a|\leqq k \iff -k\leqq a\leqq k$.

3°　次の各式は任意の実数 a，b に対して成り立つ（a，b の符号について分類してみればわかる）．

$|a|^2=a^2$,

$|ab|=|a|\cdot|b|$

とくに $k\geqq 0$　ならば　$|ka|(=|k||a|)=k|a|$

A1.5 指　数

n が自然数のとき，

n 個の a を掛け合せたもの

を a^n と表し，この記号を「a の n 乗」と読む．n を **指数** という．より丁寧に，a^n のことを，指数が n の a の **累乗**（るいじょう）（あるいは，a の **べき** ）ということもある．

この定義から明らかなように，累乗の計算では次の **指数法則** が成り立つ．

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \div a^n = a^{m-n} \qquad (\text{ただし } m>n)$$

指数が 0 や負の整数の場合の累乗は次のように定義される（以下，$a \neq 0$ とする）．

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (n \text{ は自然数})$$

この定義のもとでは，任意の整数 m，n に対して

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$
$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ．

1°　正負の指数の累乗を用いると極めて大きな数，極めて小さな数をわかりやすく表すことができる．

例 1　千$=10^3$，万$=10^4$，億$=10^8$
京(けい)$=10^{16}$，垓(がい)$=10^{20}$，
……………
不可思議(ふかしぎ)$=10^{64}$，
無量大数(むりょうたいすう)$=10^{68}$，………
割$=10^{-1}$，分$=10^{-2}$，厘(りん)$=10^{-3}$，毛$=10^{-4}$，
糸(し)$=10^{-5}$，……………
空虚(くうきょ)$=10^{-21}$，清浄(せいじょう)$=10^{-22}$，……

例 2　光の速度は　　約 3×10^{10} cm/秒
電子の質量は　　約 9.91×10^{-31} kg

A1.6　平方根

平方して a になる数，すなわち，$x^2=a$ を満たす数を a の**平方根**という．これを $\sqrt{a}$ で表す．

正の数 a の平方根は $\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}$ の2つである．0の平方根は0だけである．

また $\sqrt{0}=0$ とする．

1°　負の数 a の平方根は実数の範囲には存在しない．

2°　任意の実数 a に対して

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

A1.7　平方根を含む計算

$a>0$，$b>0$ とするとき，次の公式が成り立つ．

1°　積，商と平方根

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}, \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

例　$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$

$\sqrt{35}\div\sqrt{5}=\sqrt{7}$

2°　分母の有理化の基本原理

i）$\dfrac{A}{\sqrt{b}}=\dfrac{A\sqrt{b}}{b}$

ii）$\dfrac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$

$\dfrac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$

ここで，乗法公式 $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ を用いている．

ガイド ☞ A1.11

3°　**二重根号をはずす**

たとえば,

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

であることは, 両辺を平方してみればわかる(和の平方の公式を用いる ☞ A1.11). 一般に,

$$\sqrt{A+2\sqrt{B}} \qquad (A,\ B \text{ は正数})$$

に対して, $p+q=A$, $pq=B$ となる正数 p, q が(根号を含まない形で)見つかれば (☞「数学 I」の A1.7 解と係数の関係),

$$\sqrt{A+2\sqrt{B}}=\sqrt{p}+\sqrt{q}$$

により二重根号をはずすことができる.

また, たとえば

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

であることは, $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ であることに注意した上で, 両辺を平方してみればわかる. 与えられた $\sqrt{A-2\sqrt{B}}$ に対し, 上のような p, q が見つかれば, $p>q$ のときは

$$\sqrt{A-2\sqrt{B}}=\sqrt{p}-\sqrt{q}$$

として二重根号をはずすことができる.

A1.8 整式の基礎

文字 x についての(あるいは, x を変数とする) **単項式** は

$$\text{係数}\times x^k \qquad (k \text{ は0または自然数})$$

で表される式である. x の **整式** とは, x のいくつかの単項式を加え合わせたものである. したがって, x の整式は整理することによって

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

の形に表される. 整式のことを **多項式** ともいう.

1°　x の整式を表すのに $P(x)$, $f(x)$ などの記号を用いることがある.

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

において, $a_0\neq0$ ならば $P(x)$ は **n 次の** 整式(**n 次式**)であるという.

例　ax^2+bx+c は $a\neq 0$ ならば2次式である．

$a=0$ の可能性もあるときには，ax^2+bx+c は「高々2次の整式」であるという．2次以下の整式であるといってもよい．

2°　係数がすべて0である整式も考えるときがある．このような整式を恒等的に0の整式という．

3°　整式 $P(x)$ の x にある値 α を代入して得られる数を $P(\alpha)$ で表す．関数記号の用法と同じである．

例　$P(x)=x^2+x-2$ のとき，$P(1)=0$，$P(2)=4$

4°　2つ以上の文字についての整式も考えられる．

たとえば　$x^5+y^4-3x^3y^3$　………①

は x，y の整式である．x，y の整式の次数は，x，y を通して数えた次数によって定める．たとえば①の第1項は5次，第2項は4次，第3項は $3+3=6$ 次である．したがって

①は x，y の整式として6次である．

5°　$x+y$，xy，x^3+y^3 のおのおのにおいて，x と y とを入れかえても変わりがない．このように，x，y を入れかえても変わりがない2変数の整式 $F(x,\ y)$ を x，y の **対称式** という．

x，y の対称式のうちで，

$$u=x+y,\qquad v=xy$$

の二つを **基本対称式** という．任意の対称式は基本対称式の整式で表されることが知られている．

例　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=u^3-3uv$．

3つの文字 x，y，z についての基本対称式は

$$x+y+z,\quad yz+zx+xy,\quad xyz$$

の三つである．

6°　整式の加法，減法の計算は同類項の係数を加，減することによって行われる．教科書でマスターしてほしい．

7°　整式の乗法計算は，文字式の加法，乗法の基本法則，特に指数法則を用いて実行される．教科書でマスターしてほしい．また割り算の実行の仕方の説明も教科書にゆずりたい．

A1.9　整式の割算

I．整式の倍数・約数

$f(x)$，$g(x)$ を 2 つの整式とする．$f(x)$ を $g(x)$ で割算したときの余りが 0 ならば，$f(x)$ は $g(x)$ で **割り切れる** という．このとき

$$f(x)=Q(x)g(x)$$

が成り立つような整式 Q が存在するといっても同じことである（Q は $f\div g$ の商（quotient）にほかならない）．

1°　f が g で割り切れるとき，

f は g の **倍数**（multiple）である，
g は f の **約数**（divisor）である，

という．

式どうしであるのに倍数，約数というのは少々妙であるが，定着した訳語であるから仕方がない．

2°　因数分解は，あたえられた整式を，約数の積の形に表すことにほかならない．

例　$f(x)=x^4-4$

$$=(x^2-2)(x^2+2) \quad \cdots\cdots ①$$

$$=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2) \quad \cdots\cdots ②$$

①は係数を整数に限定したとき．②は係数を実数としたとき．

II．公倍数・公約数

2 つの整式 f，g の公倍数とは，f の倍数でもあり，g の倍数でもある整式のことである．すなわち，

$$h=Q_1f, \qquad h=Q_2g$$

となる整式 Q_1，Q_2 が存在するような整式 h である．

例　整式 $f(x)g(x)$ は f と g の公倍数である．

f，g の公倍数のうちで，次数が最小のものを f と g の **最小公倍数** という．

一方，2 つの整式 f，g の公約数とは，f の約数でもあり，かつ，g の約数でもある整式のことである．すなわち，

$$f=q_1d, \qquad g=q_2d$$

となる整式 q_1，q_2 が存在するような整式 d である．

f，g の公約数のうちで，次数が最大のものを，f と g の **最大公約数** という．

1°　あたえられた整式 f，g に対して，その最小公倍数，最大公約数を k 倍(ただし，k は 0 でない数)した整式も，やはり，それぞれ最小公倍数，最大公約数である．

　したがって，これらを求めようという問題では，最高次の係数が 1 のものとか，係数が整数であるものとか，見掛けのよいものをえらんで答える．

例　$6x^2-21x+18$ と $6x^2-6x-12$

$$\left.\begin{array}{l}6x^2-21x+18=3(x-2)(2x-3)\\ 6x^2-6x-12=6(x-2)(x+1)\end{array}\right\}$$

$$\text{より}\left\{\begin{array}{l}\text{最大公約数}=x-2\\ \text{最小公倍数}=(x-2)(x+1)(2x-3)\end{array}\right.$$

A1.10　整式割算の原理とその応用

I．整式の除法

> [定理]　f，g を x の整式とする．f を g で割ったときの商を Q，余りを R とすれば
>
> $$f=gQ+R,\qquad R\text{ は }g\text{ より低次}$$
>
> が成り立つ．

1°　整数の除法で，たとえば

　25 を 3 で割ったときの商は 8，余りは 1 であるから，このとき

　$25=3\times 8+1$，余り 1 は 3 より小さい

が成り立つ．

　整式の除法では，たとえば(左を見よ)

x^4+3 を x^2-x で割ったときの

　商は x^2+x+1，余りは $x+3$

であるから，

$$\begin{array}{r}x^2+x+1\\ x^2-x\,\overline{)\,x^4+3}\\ \underline{x^4-x^3}\\ x^3\\ \underline{x^3-x^2}\\ x^2\\ \underline{x^2-x}\\ x+3\end{array}$$

$x^4+3=(x^2+x+1)(x^2-x)+(x+3)$，$x+3$ は x^2-x より低次．

2°　f が m 次式，g が n 次式であるとする．
$m \geqq n$ ならば，Q は $(m-n)$ 次式，R は $(n-1)$ 次以下の整式である．
$m<n$ ならば，$Q=0$，$R=f$ として上式が成立する．

3°　$R=0$ のときが，"f が g で割り切れる"場合にあたる．

II．余りの定理・因数定理

> [定理]　整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割算したときの余りは，$x=\alpha$ のときの整式の値 $P(\alpha)$ に等しい．

余りの定理（剰余定理）

1°　**証明**：$x-\alpha$ で割算したときの商を $Q(x)$，余りを R とすれば，R は 0 次以下の整式，すなわち，定数であって，

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

が成り立つ．これに $x=\alpha$ を代入すれば

$$P(\alpha)=0\cdot Q(\alpha)+R=R$$

が得られる．

2°　整式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ $(a \neq 0)$ で割った余り R は，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ で与えられることが，同様にして導かれる．☞ B. 114

> [定理]　整式 $P(x)$ が $x-\alpha$ で割り切れる
> $\iff P(\alpha)=0$

因数定理

1°　例　$x^3+2y^3-3xy^2$ は x の整式 $P(x)$ とみると
$P(y)=y^3+2y^3-3y^3=0$ であるから，$x-y$ で割り切れる．
実際，$P(x)=x^3+2y^3-3xy^2=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$．

2°　証明は余りの定理による．

A1.11　乗法および因数分解の公式

たとえば，

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

は，“左辺から右辺へ”の形で用いれば，掛け算の式を単項式の和で表すための公式，すなわち，**乗法の公式**（**展開の公式** ともいう）である．

逆に，“右辺から左辺へ”の形で用いるときは，**因数分解の公式** である．

1°　以下に，実用上，公式として役立ついくつかの恒等式を列挙する．これらの掛算を実行しての検証は各自にまかせる．

(1)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2)　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3)　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(4)　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(5)　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(6)　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)$

(8)　$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

(9)　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(10)　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(11)　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

A1.12　分数式とその計算

$\frac{3}{5}$，$-\frac{15}{7}$ などの分数とそれらの計算（すなわち，約分，通分，四則演算）については，小学校・中学校で学んでいる．これらを分母・分子が整式である場合に拡張しよう．

I．分数式の定義と相等

A, B を整式とするとき，$\dfrac{A}{B}$ の形の式を **分数式** または **有理式** といい，A をその分子，B をその分母という．

1°　例　$\dfrac{2x}{x^2-1}$ は x の分数式である．

2°　分数式 $\dfrac{A}{B}$ では，B が恒等的に 0 の場合は考えない．

3°　2 つの分数式 $\dfrac{A}{B}$, $\dfrac{A'}{B'}$ が等しい

$\iff$ 2 つの整式 AB', $A'B$ が等しい．

II．約分と通分の原理

C が恒等的に 0 でない整式のとき，

$$\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}$$

が成り立つ．右辺を左辺になおす変形が約分である．

1°　例　$\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$

すなわち，分数式としての等式

$$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1} \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ．

2°　例　$M=\dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)}$, $N=\dfrac{x+1}{(x-2)(x-3)}$ の場合，M, N の分母の最小公倍数 $(x-1)(x-2)(x-3)$ が共通の分母になるようにして $M=\dfrac{x^2-9}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, $N=\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

と **通分** できる．

3°　一般に，2 つの分数式 $\dfrac{A}{B}$, $\dfrac{A'}{B'}$ については，BB' を共通分母に用い，

$$\frac{A}{B}=\frac{AB'}{BB'},\ \frac{A'}{B'}=\frac{BA'}{BB'}$$

と通分できる．しかし共通分母の次数をできるだけ小さくしたいときには，B, B' の最小公倍数を共通分母になるように通分する．

III. 分数式の四則

分数式の加法，減法は，通分しておいてから

$$\frac{A}{C}+\frac{A'}{C}=\frac{A+A'}{C},\quad \frac{A}{C}-\frac{A'}{C}=\frac{A-A'}{C}$$

にしたがって計算する．

分数式の乗法，除法は，それぞれ，

$$\frac{A}{B}\times\frac{A'}{B'}=\frac{AA'}{BB'} \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{A'}{B'}=\frac{A}{B}\times\frac{B'}{A'}=\frac{AB'}{BA'} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

によって定義される．

1°　$\frac{A}{B}\div\frac{A'}{B'}$ のことを $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{A'}{B'}}$ とも書く．このように，分母，分子がまた分数式になっている式を **繁分数式** という．

例　$$\frac{x-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{x^2-4}{x}\times\frac{x}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)x}{x(x-2)}=x+2$$

$\dfrac{x-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}$ の(大きな水平線の上下の)分母，分子に x をかけて，

$$\frac{x-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$$

としてもよい．

A1.13　式の証明

I. 恒等式

たとえば，x をふくむ等式 $x^2-4=0$ は，$x=2,\ -2$ の2つの値に対してしか成り立たない．それに対して，等式

$$(x-2)(x+2)=x^2-4$$

は，x がどのような値をとっても成り立つ．

このように，ふくまれる文字(変数)がどのような値をとっても成り立つ等式を **恒等式** という．

1°　$(x+2)^2=x^2+4x+4$　………①

はxについての恒等式である．このようなとき，

"①はxに関して恒等的に成り立つ"といういい方もする．

2°　$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ は，$x,\ y$ がどのような値をとっても成り立つ．したがって，$x,\ y$ についての恒等式である．

3°　$\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2x}{x^2-4}$

は，分母を0とする値をのぞけば，任意の x に対して成り立つ．分数式に関するこのような等式と恒等式とよぶことがある．

II. 計算の基本法則と恒等式

加法(減法)および乗法の基本法則，すなわち，交換法則，結合法則，分配法則はどのような数に対しても成り立つ．したがって，これらの法則による変形で導かれる等式は恒等式である．

たとえば，$(x+y)(x-y)$ に対する次の変形はその例である．

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y)&=x(x-y)+y(x-y) && [\text{分配法則}]\\ &=x^2-xy+yx-y^2 && [\text{分配法則}]\\ &=x^2-xy+xy-y^2 && [\text{交換法則}]\\ &=\{x^2+(-xy+xy)\}-y^2 && [\text{結合法則}]\\ &=x^2-y^2\end{aligned}$$

乗法の展開公式および因数分解の公式は，そこに用いられる文字についての恒等式である．

分数式に関しては，計算の基本法則および通分・約分による変形で導かれる等式は恒等式である．

Ⅲ．等式証明の手順

たとえば，等式

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2) \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を証明せよという課題は，②が a，b について恒等的に成り立つこと (すなわち，②が恒等式であること) を証明せよという課題である．

このような等式証明を処理する方針として，次の三つがある．

i）一方の辺を変形して (Ⅱで述べたような変形により) 他の辺を導く．
ii）両辺をそれぞれ変形して同じ式へと導く．
iii）両辺の差が 0 であることを示す．

Ⅳ．整式の間の恒等式

$f(x)$，$g(x)$ が x の整式であるとき，$f(x)$ と $g(x)$ が恒等的に等しいための条件，すなわち，等式

$$f(x)=g(x)$$

が x についての恒等式であるための条件は，

$f(x)$，$g(x)$ の各次数の係数が一致する　$\cdots\cdots\cdots$ ③

ことである．

もし，$f(x)$，$g(x)$ の次数が n をこえないことがわかっていれば，③は

$f(x)=g(x)$ が x の異なる $n+1$ 個の値に対して成り立つ

でおき換えることができる．

ガイド☆　上の事実の応用については，☞ B.126，B.128

Ⅴ．条件つきの等式の証明

たとえば，

$$x^2+x+1=0 \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

のとき，$x^3=1$ であることを示したいとする．そのとき，④を2次方程式として解いた解を三乗して1になることを確めるのも一つの方法である．しかし，

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

と因数分解すれば，条件④のもとで等式 $x^3=1$ が成り立つことが明瞭となる．

このような証明法は，もっと複雑な条件のもとでの等式の証明にも適用できる．たとえば，

$$a+b+c=0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

のもとで，等式

$$a^3+b^3+c^3=3abc \quad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

を証明したいとする．このとき，因数分解

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

を知っていれば，条件⑤のもとで⑥がつねに成立することがただちに得られる．

1°　上のように，あたえられた条件のもとで0となる因数をくくり出す証明は成功すればあざやかである．より手堅い方法として，“文字の消去”がある．

⑤についていえば，⑤より

$$c=-(a+b)$$

である．これを⑥の両辺に代入すると，

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3$$
$$=a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$$
$$=-3a^2b-3ab^2$$

および

$$3abc=-3ab(a+b)$$
$$=-3a^2b-3ab^2$$

が得られ，⑥の成立がわかる．

このように，与えられた条件を用いて文字の消去が可能なときは，証明するべき等式は残った文字についての恒等式である．

2°　比例式を条件とする等式証明および，その他の問題については数Aの範囲をやや越えるが，実践的立場からB篇で学ぶこととする．

A1.14　不等式の基本性質

実数には大小関係がある．すなわち，任意の実数 a, b について

$$a>b, \quad a=b, \quad a<b$$

の3つの関係のうち，必ずどれか1つが成り立つ．

1°　$c<d$ と $d>c$ とは同じ意味である．

大小関係については，次の法則が基本的である．

$$\boldsymbol{a>b \Longrightarrow a+c>b+c} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

$$\boldsymbol{a>b} \text{ **かつ** } \boldsymbol{c>0 \Longrightarrow ac>bc} \quad \cdots\cdots\text{②}$$

$$\boldsymbol{a>b} \text{ **かつ** } \boldsymbol{b>c \Longrightarrow a>c} \quad \cdots\cdots\text{③}$$

2°　$a>b$ の両辺に $-b$ を加えると①により，

$$a-b>0 \quad \cdots\cdots\text{④}$$

となる．逆に，④が成り立てば，両辺に b を加えると①により $a>b$ が得られる．よって，次の定理が成り立つ．

[定理]

実数 a，b については，

$$\boldsymbol{a>b \Longleftrightarrow a-b>0}$$

$$\boldsymbol{a<b \Longleftrightarrow a-b<0}$$

3°　$a>b$ の両辺に $-a$ を加えると $0>-a+b$．この両辺に $-b$ を加えると $-b>-a$ となる．これは $-a<-b$ と同じである．すなわち，次の公式が成り立つ．

$$a>b \Longleftrightarrow -a<-b. \quad \cdots\cdots\text{⑤}$$

よって，“不等式の両辺の符号を変えると (両辺に -1 を掛けると)，不等号の向きは逆になる”．

次に，$a>b$ のとき，両辺に負の数 $c<0$ を掛けてみよう．このとき $-c>0$ であるから，②により $(-c)a>(-c)b$ すなわち $-ca>-cb$．⑤によって (両辺の符号を変えて) $ca<cb$ となる．すなわち，次の法則が得られた．

$$a>b, \text{ かつ } c<0 \Longrightarrow ac<bc \quad \cdots\cdots\text{⑥}$$

いいかえれば，不等式の両辺に **負の数を掛けると不等号の向きが逆になる**．

4°　実際問題では前頁の 2° の定理を適用することが意外に多い．その場合には，$a-b$ の符号の判定が大切である．

関連して，次の事実を確認しておこう．

0でない実数 A，B については，

A，B 同符号 $\Longleftrightarrow$ $AB>0$

A，B 異符号 $\Longleftrightarrow$ $AB<0$

A1.15　絶対不等式

I． まず，例について考える．x を実数とすると，

$$\left.\begin{array}{l} x\neq 0 \Longrightarrow x^2>0 \\ x=0 \Longrightarrow x^2=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots ①$$

であるから，

$$x^2\geqq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

は，つねに成り立つ．このようにして含まれる変数がどのような実数値を取っても成り立つ不等式を **絶対不等式** という．

②によれば

$$-x^2\leqq 0,$$

$$x^2+1>0$$

も，絶対不等式である．

また，x，y が実数のときは

$$x^2+y^2\geqq 0 \quad \cdots\cdots ③$$

はつねに成り立つ．よって，③は 2 変数の絶対不等式である．

与えられた不等式が絶対不等式であることを示す（つねに成り立つことを示す）には，両辺の差を考えたり，しかるべき変形を行ったりして，基本的な絶対不等式

$$x^2\geqq 0,\quad x^2+y^2\geqq 0$$

などに帰着するのが定石である．

1°　例　$ab\leqq\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}$ ……④

$$右辺-左辺=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2ab)=\frac{1}{2}(a-b)^2$$

ところが　$(a-b)^2 \geqq 0$　はつねに成り立つ．
よって，④はつねに成り立ち，絶対不等式である．等号は $a=b$ のときに成り立つ．

II．正数に対する絶対不等式

たとえば，$x>0$ とすると，$\sqrt{x}$ は実数である．したがって，Iの1°の④において

$$a=\sqrt{x},\ b=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

とおくことができる．すると，

$$1 \leqq x+\frac{1}{x} \qquad (x>0) \qquad \cdots\cdots ①$$

が得られる．等号が成り立つのは $\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のとき，すなわち $x=1$ のときである．

①のように，変数の変域が制限を受けていても，そこでつねに成り立つ不等式を絶対不等式ということがある．

1°　$a,\ b>0$ として

$$\frac{a+b}{2}=\text{相加平均}, \qquad \sqrt{ab}=\text{相乗平均}$$

の大小を比べよう．

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}{2}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

であるから

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \qquad (a,\ b>0,\ \text{等号は } a=b \text{ のとき}) \qquad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．これを

相加平均≧相乗平均　　　　　　　　　$\cdots\cdots$ ③

の定理ということがある．

研究　③は3つの正数に対しても成り立つ．すなわち

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc} \quad (a,\ b,\ c>0,\ \text{等号は } a=b=c \text{ のとき})$$

ここで，$\sqrt[3]{}$ は，3乗根を表す記号である．(☞数学II)

III.　最大・最小と絶対不等式

たとえば，$x>0$ を変域として

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

を考える．IIの①によれば，

$f(x)\geqq 1$ がつねに成り立ち，$x=1$ のときは等号成立……①

である．これは，$x>0$ の変域における $f(x)$ の最小値が1であることを意味している．

一般の $f(x)$ についても，ある定数 k に対して

$$f(x)\geqq k \qquad \cdots\cdots②$$

がつねに成り立ち，(②が絶対不等式であり)，変域内のどれかの点で②の等号が成り立てば，k は $f(x)$ の最小値である．

逆に，$f(x)$ の最小値が k ならば，②はつねに成り立つ．

なお，$f(x)$ の最小値が k よりも大きければ

$$f(x)>k$$

がつねに成り立つことになる．

このような考察は変数が2つ以上出てくる場合についても同様である．

1°　例　$F=x^2+xy+y^2+y$　(x, y 実数)

について考える．

$$\begin{aligned}F&=\left(x^2+xy+\frac{y^2}{4}\right)+\frac{3}{4}y^2+y\\&=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y^2+\frac{4}{3}y\right)\\&=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\\&\geqq-\frac{1}{3}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots③$$

最後の行の等号は $x+\frac{y}{2}=0$, $y+\frac{2}{3}=0$ のとき，すなわち，

$x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$ のときに成立する．

こうして，F の最小値が $-\frac{1}{3}$ であること，したがってまた，

$$x^2+xy+y^2+y\geqq-\frac{1}{3}$$

が絶対不等式であることが示された．

A1.16　条件と命題

I．命　題(めいだい)

文や式で表現された主張で，それが正しいか正しくないかが定まるものを **命題** という．たとえば

17 は実数である　………①

$4>5$　………②

$x^2=2$ となる実数 x が存在する　………③

すべての実数 x に対して $x^2>-1$ となる　………④

はいずれも命題である．

命題は正しいとき，それが成り立つ，あるいは，それは **真** であるという．正しくない命題は，成り立たない，あるいは，**偽** であるという．

上の①，③，④は真であるが，②は偽である．

II．条　件

たとえば，実数 x についての不等式

$x>\sqrt{2}$　………①

は，$x=1$ を代入すると，$1>\sqrt{2}$ という偽な命題となる．しかし，$x=2$ を代入すると，$2>\sqrt{2}$ という真な命題になる．

このように，変数 x を含む文で，x の値を定めると命題になるものを，**x についての条件**，あるいは単に **条件** といい，$p(x)$，$q(x)$，あるいは簡単に p，q などで表す．

条件 $p(x)$ における変数 x の変域を条件 $p(x)$ の **全体集合** ということがある．

1°　例 1　不等式 $x^2>2$ は，実数 x についての条件と理解される．x についての方程式，たとえば，$x^2+2x-1=0$ も，実数解を考えているときには，実数 x についての条件である．したがって全体集合は実数全体である．

2°　例 2　整数についての条件

n^2+2n　　は奇数である

の全体集合は整数全体である．

3°　条件 $p(x)$ に全体集合を添えて書くときには

$$p(x) \qquad (x \in U)$$

のように書く．(全体集合が U のとき) さらに $p(x)$ の文を具体的に記すときには

$$p(x): x^2 > 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$q(n): n^2 + 2n \text{ は奇数である} \quad (n \in \mathbb{N})$$

のように書く．

4°　U を全体集合とする条件 $p(x)$ を考える．U の要素 a について，

$p(a)$ が成り立つとき，a は $p(x)$ を **満たす**

ともいう．同様に

$p(a)$ が成り立たないとき，a は $p(x)$ を **満たさない**

ともいう．

Ⅲ.　条件と真理集合

x に関する条件

$$p(x) \qquad (x \in U) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

において，$p(x)$ を満たす x の集合全体の集合 P を考え，これを，条件 p の **真理集合** とよぶことがある．すなわち

$$P = \text{“}p\text{の真理集合”} = \{x \in U \mid p(x) \text{ が成立}\} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

1°　例　実数 x についての条件

$p(x): x^2 = 2$ および $q(x): x^2 = -1$

のそれぞれの真理集合を P，Q とおけば

$P = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$,　　$Q = \phi =$ 空集合

2°　例　x についての条件

$p(x)$:　$(x-1)(x-2) < 0$

$q(x)$: $x(x-1)(x-2) > 0$

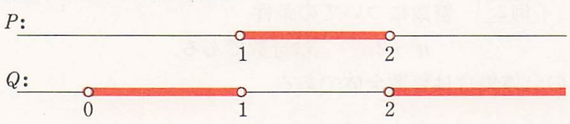
のそれぞれの真理集合を P，Q とおけば

$P = \{x \mid 1 < x < 2\}$,

$Q = \{x \mid 0 < x < 1 \text{ または } 2 < x\}$

$\quad = \{x \mid 0 < x < 1\} \cup \{x \mid 2 < x\}$

数直線上での P，Q の図示



IV.　条件の否定・合成

Uを全体集合とする条件 $p(x)$, $q(x)$ について考える.

"$p(x)$ でない" という条件を p の **否定** とよび, $\bar{p}$ あるいは $\bar{p}(x)$ で表す

a をUの要素とするとき,

$p(a)$ が成り立たない $\Longleftrightarrow$ $\bar{p}(a)$ が成り立つ,

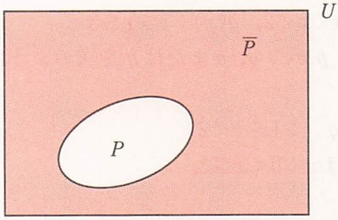
$p(a)$ が成り立つ $\Longleftrightarrow$ $\bar{p}(a)$ が成り立たない.

1°　p, $\bar{p}$ のそれぞれの真理集合を P, $\bar{P}$ とおけば

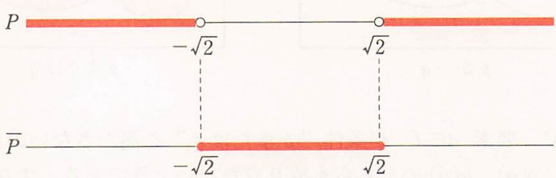
$\bar{P}=\{x\in U \mid$ ただし $x\notin P\}$

$=(U$に関する$)$ P の補集合

である.



2°　例　実数 x に関する条件 p : $x^2>2$, の否定 $\bar{p}$ は条件 $x^2\leqq 2$ である. p, $\bar{p}$ のそれぞれの真理集合 P, $\bar{P}$ は次のように図示される.



さて, "$p(x)$ かつ $q(x)$" は x の条件である. それを記号では, 次のどれかで表す.

p かつ q, p and q, $p\wedge q$　………①

条件 p かつ q を満たす要素 $a\in U$ は, $p(x)$ を満たし, かつ $q(x)$ を満たす要素である.

p, q のそれぞれの真理集合を P, Q とおけば

p かつ q の真理集合$=P\cap Q$　………②

である．すなわち，2つの条件を“かつ”で合成した条件の真理集合は，もとの真理集合の共通部分となる．

同様に，“$p(x)$ または $q(x)$”も x の条件となる．この条件を記号では次のどれかで表す．

p または q，p or q，$p \vee q$　　　　………③

条件 p または q を満たす $a \in U$ は，$p(x)$，$q(x)$ の少なくとも一方を満たす要素である．したがって

p または q の真理集合 $= P \cup Q$　　　　………④

すなわち，2つの条件を“または”で合成すれば，真理集合はもとの真理集合の和集合である．

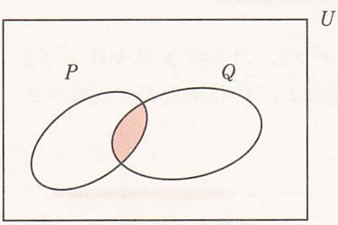
3°　例　実数 x についての2つの条件が

$p(x)：0 < x < 2$，$q(x)：1 \leqq x \leqq 3$

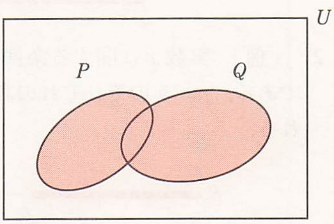
の場合には，p かつ q，p または q を次のように書きかえることができる．

p かつ q　：$1 \leqq x < 2$

p または q：$0 < x \leqq 3$.



p かつ q



p または q

4°　要素 $a \in U$ が条件“p または q”を満たさないのは，$p(a)$，$q(a)$ のどちらも成り立たないときである．すなわち，$\overline{p}(a)$，$\overline{q}(a)$ のどちらもが成り立っているときである．よって

$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p}$ かつ $\overline{q}$　　　　………⑤

同様に

$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$　　　　………⑥

も成り立つ．記号∧，∨を用いれば

$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$，$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$　　　　………⑦

となり，集合についてのド・モルガンの法則と平行な法則が成り立つことがわかる．

V.　条件からつくられる命題

Uを全体集合とする条件 $p(x)$ が与えられたとき，

すべての x について　$p(x)$ が成り立つ　………①

という主張は正しいか，正しくないかのどちらかである．すなわち①は命題である．

①が成り立たないのは，$p(x)$を満たさないような要素がUの中に少なくとも一つ存在するときである．

命題①を，$p(x)$ についての **全称命題** あるいは，for-all- 命題とよぶことがある．また，①の代わりに

$\forall x,\ p(x)$　………②

と書くことがある．全体集合を明らかにしたいときは

$\forall x \in U,\ p(x)$　………③

のように書く．

1°　例　xが実数を表す変数であるとき，

すべてのxに対して　$x^2+2x+2>0$　………④

は真な命題である．しかし

すべてのxに対して　$x^2+2x>0$　………⑤

は偽な命題である．

2°　①の主張に反論する，すなわち，①が偽であることを示すためには，$p(a)$ が成り立たないような $a \in U$ の例を一つ挙げれば十分である．このような例を①が偽であることを示すための **反例** (counter example) という．

たとえば⑤に対する反例として $x=-1$ を取ることができる．そのとき

左辺$=-1$，右辺$=0$ であるから⑤は満たされない．

同様に，$x=0$ も⑤の反例として通用する．

左辺$=0$ となるが，$0>0$ は成立しないからである．

さて，①とならんで，次の主張も命題である．

$p(x)$ を満たすような要素xが存在する　………⑥

この命題⑥を，$p(x)$についての **特称命題** あるいは，there-exists- 命題とよぶことがある．また⑥の代わりに

$\exists x,\quad p(x)$　………⑦

と書くことがある．全体集合を明らかにしたいときは

$$\exists x \in U,\quad p(x)$$

のように書く．

3°　例　xを実数を表す変数とするとき，

$$\exists x,\quad x^2 \leqq 0$$

$$\exists x,\quad x^2+2x<0$$

は真であるが，

$$\exists x,\quad x^2+2x+1<0$$

は偽な命題である．

4°　$\forall x$, $p(x)$ が成り立たないのは，$\overline{p}(x)$ を満たす要素が存在するときである．また，$\exists x$, $p(x)$ が成り立たないのは，すべての要素が $p(x)$ を満たさない，すなわち，すべての要素が $\overline{p}(x)$ を満たすときである．

こうして次の公式が理解できる．

$$\overline{\forall x,\ p(x)} = \exists x,\ \overline{p}(x)$$

$$\overline{\exists x,\ p(x)} = \forall x,\ \overline{p}(x).$$

A1.17 必要条件・十分条件

I．仮定と結論

数学における命題は，たとえば

$$x^2<4 \text{ ならば } -2<x<2$$

のように，2つの条件 $p(x)$，$q(x)$ を用いて，

$$p(x) \text{ ならば } q(x) \qquad \cdots\cdots ①$$

のように述べられることが多い．

①のような形に述べられている命題について，

$p(x)$ を **仮定**，$q(x)$ を **結論** とよぶ．

なお，①の“ならば”の代わりに $\Longrightarrow$ を用いて，

$$p \Longrightarrow q$$

と書く．

1°　①を $p(x)$, $q(x)$ からつくられた含意(がんい)あるいは if-then- 命題とよぶことがある.

II.　必要条件・十分条件

x の変域を U とする. このとき, 命題

$$p \Longrightarrow q \qquad \cdots\cdots ①$$

が真であるのは,

$p(x)$ を成り立たせるすべての x に対して $q(x)$ が成り立つときである.

したがって, $p(a)$ が成り立つにもかかわらず $q(a)$ が不成立となるような $a \in U$ が存在すれば, 命題①は偽である.

1°　すなわち, $p(x)$ を満たすが $q(x)$ は満たさない U の要素 a は①が偽であることを示す反例である.

2つの条件 $p=p(x)$, $q=q(x)$ について, 命題

$$p \Longrightarrow q$$

が真であるとき,

条件 p は条件 q の **十分条件** である

という. また, そのとき,

条件 q は条件 p の **必要条件** である

という.

2°　例　x が実数を表すとき,

$$0<x<2 \Longrightarrow x^2<4 \qquad \cdots\cdots ②$$

は真である. したがって,

条件 $0<x<2$ は, 条件 $x^2<4$ の十分条件である.

このように, 十分条件は他方の条件の成立を保証するのに十分な条件なのである.

同じく, ②が真であるから

条件 $x^2<4$ は, 条件 $0<x<2$ の必要条件である.

このように, 必要条件は, 他方の成立にともなって必然的に成り立つ条件なのである.

III. 必要十分条件

x についての2つの条件 $p=p(x)$, $q=q(x)$ について,

$$p \Longrightarrow q \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

が真であり，かつ,

$$q \Longrightarrow p \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

も真であるとき，p は q の十分条件であり，かつ，必要条件でもある．このことを,

p は q の **必要十分条件** である

といい表す．このとき，q は p の必要十分条件でもある．

上の①, ②をまとめて,

$$p \Longleftrightarrow q \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

と書く．

すなわち，p, q が，たがいに他方の必要十分条件となるのは，③が成り立つときである．

例　x が実数を表すとき,

$$-2<x<2 \Longleftrightarrow x^2<4$$

が成り立つ．

したがって，$-2<x<2$ は $x^2<4$ の必要十分条件である．

また，$x^2<4$ は $-2<x<2$ の必要十分条件である．

1°　2つの条件 p, q について

$$p \Longleftrightarrow q$$

が成り立つとき，すなわち，両方の条件がたがいに必要十分条件になっているとき，p と q は，**同値** であるという．

A1.18 論　証

I．逆

2つの条件 $p=p(x)$, $q=q(x)$ でつくられる命題

$$p \Longrightarrow q \qquad \cdots\cdots①$$

を考える．

ここで p, q を入れかえた命題

$$q \Longrightarrow p \qquad \cdots\cdots②$$

を，もとの命題①の **逆** という．

1° 例　実数 x についての条件

$p=$ "$x>2$"

$q=$ "$x^2>4$"

を考える．このとき，命題 $p \Longrightarrow q$ は

$$x>2 \Longrightarrow x^2>4 \qquad \cdots\cdots③$$

を意味し，これは成り立つ．

③の逆は，

$$x^2>4 \Longrightarrow x>2$$

を意味するが，これは成り立たない($x<-2$ ならば左辺が成り立つのに右辺が成り立たないからである)．

一般に，(もとの命題が真であっても)

逆は必ずしも成り立たない．

II．対　偶

上の 例 の p, q について，それぞれの否定 $\bar{p}$, $\bar{q}$ をつくってみると，

$\bar{p}=$ "$x \leqq 2$"

$\bar{q}=$ "$x^2 \leqq 4$"

となる．

$\bar{q}$ が成り立つと仮定すると，$-2 \leqq x \leqq 2$ であるから，$\bar{p}$ が成り立つ．すなわち，

$$\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$$

が成り立っている．

命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，命題

$$\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$$

をもとの命題の **対偶** という.

一般に，もとの命題が真ならば対偶も真であり，もとの命題が偽ならば対偶も偽である．すなわち，

もとの命題とその対偶とは真偽を共にする

のである.

1°　もとの命題とその対偶とは，つねに真偽をともにすることがわかっているのだから，命題 $p \Longrightarrow q$ を証明せよという課題に対して，対偶 $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ を証明してもよい(対偶を取って証明するという.)

2°　命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，命題 $\bar{p} \Longrightarrow \bar{q}$ を **裏** という．裏は逆の対偶である.

III. 背 理 法

背理法とは，ある命題mを証明したいときに，

mが偽であると仮定すると矛盾が導かれる

ことを証明する方法である．矛盾が導かれるのであるから，mが偽であるとの仮定が不成立．したがって，mが真であると断定してよいからである.

具体例については教科書で学んでいるはずであるが，簡単な例により考え方を納得しよう.

1°　例　次の命題を証明したい.

$\dfrac{1}{96}$ は有限小数では表せない.　………①

①の主張が偽であると仮定する．すなわち

$\dfrac{1}{96}$ は有限小数で表せる.　………②

と仮定する．$\dfrac{1}{96}$ が小数点以下 n 桁までの有限小数で表せたとすると

$$\frac{1}{96}=\frac{m}{10^n} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

が成り立つような自然数mが存在する．③より

$10^n=2^n\cdot5^n,\quad 96=3\cdot32=3\cdot2^5$

を用いて

$$2^n \cdot 5^n = 3 \cdot 2^5 \cdot m \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

④の右辺は3の倍数である．しかし④の左辺は素因数3を含まないので3の倍数でない．3の倍数の自然数と3の倍数でない自然数が等しくなることはない．よって④は矛盾である．したがって②は真ではあり得ない．よって①が背理法により証明された．

2°　背理法のことを“矛盾による証明法”ということがある．

3°　例#　意欲のある読者のために次の有名な定理の背理法による証明法を示しておこう．

[定理]（ユークリッド）

素数は無数に存在する．

証明：上の定理の主張に反して，素数は有限個であると仮定する．すなわち，素数のすべてが，次のN個であると仮定する．

$$p_1 < p_2 < \cdots\cdots < p_N \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

p_Nは最大の素数である．ここで，

$$m = (p_1 \times p_2 \times \cdots\cdots \times p_N) + 1 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

とおく．次のことを確かめよう．

i）mはp_Nよりも大きい．これはp_1，p_2，……，p_{N-1}のどれもが2以上であることから明らかである．

ii）mは素数である．なぜなら，⑥の右辺の形からmをどのp_i($i=1, 2, \cdots\cdots N$)で割算しても1が余って割りきれない．自分自身と異なるどんな素数で割っても割りきれない自然数は素数である．よってmは素数である．

結局，i)，ii)から最大の素数p_Nよりも大きな素数が存在することになり矛盾である．よって定理が成り立つ．■

A1.E 整　数 (A1への補足)

高校の教科書では正面から取り上げられることがないが，大学入試の立場からも，代数学の基礎の立場からも重要な“整数の扱い”をここでまとめておこう．意欲ある読者の学習の材料である．

A1.E1　約数・倍数

I．正の整数 p, q に対し，$\dfrac{p}{q}$ が整数となるとき，q を p の **約数**，p を q の **倍数** という．

p を整数とするとき，1 と p は p の約数である．p がこれ以外の約数を持たないとき，p を **素数** という．ただし，便宜上 $p=1$ は素数と言わないことにしておく．

どんな整数も，素数の積の形に表すこと (素因数分解) ができる．

例　12 は $2^2\cdot 3$ と素因数分解される．したがって 12 の約数は，$1,\ 2,\ 2^2,\ 3,\ 2\cdot 3,\ 2^2\cdot 3$ である．

II．r が p の約数であり，かつ q の約数でもあるとき，r を p と q の **公約数** といい，p と q の公約数のうち最大のものを **最大公約数** という．また p と q の最大公約数が 1 であるとき，p と q は **互いに素(そ)** であるという．

例　1°　$12(=2^2\cdot 3)$　と　$16(=2^4)$ の公約数は，$1,\ 2,\ 2^2$
最大公約数は $2^2=4$ である．

2°　$12(=2^2\cdot 3)$　と　$35(=5\cdot 7)$ は互いに素である．

III．r が p の倍数であり，かつ q の倍数でもあるとき，r を p と q の **公倍数** という．p と q の公倍数のうち最小のものを **最小公倍数** という．

例　$12(=2^2\cdot 3)$　と　$16(=2^4)$ の最小公倍数は $2^4\cdot 3=48$ である．

Ⅳ．a，b，c を正の整数とする．a と b が互いに素のとき，

$$a \text{ は } bc \text{ の約数} \Longrightarrow a \text{ は } c \text{ の約数}$$

が成立する．

このことは，次のように考えれば納得できるだろう．

「$\dfrac{bc}{a}$ は整数である．しかし b と a は互いに素なので，b と a の間で約分することはできない．したがって，もっぱら c と a の間で約分が起き，分母が 1 になるはずである．これは a が c の約数であることを意味する」と．

1°　上のような納得のしかたは，「約分」という経験によって培われたある種の直感に基いている．

2°　約数・倍数を正の整数に限定しない場合もある．たとえば，「3 の約数は ±1，±3 である」，「−6 は 2 の倍数である」，「整数 a，b が ±1 以外の公約数を持たないとき，互いに素であるという」など．このときにも(正とは限らない)整数 a，b，c に対して，a と b が互いに素ならば，

$$a \text{ は } bc \text{ の約数} \Longrightarrow a \text{ は } c \text{ の約数}$$

が成立する．

A1.E2　方程式の整数解(1)

Ⅰ．方程式

$$3x=2y$$

を満たす整数 x，y の組をすべて求めよう．$2y$ に等しい $3x$ は 2 で割り切れるが，3 と 2 は互いに素だから，x は 2 で割り切れなければならない．そこで $\dfrac{x}{2}=m$ とおくと，$y=3m$ となる．よって，上の方程式の解として

$$(x,\ y)=(2m,\ 3m)\qquad (m \text{ は整数})$$

を得る．

II． 方程式

$$3x-2y=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

の整数解をすべて求めよう．$(x,\ y)=(1,\ 1)$ は1つの整数解である，すなわち

$$3\cdot 1-2\cdot 1=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

ここで①と②の差をとると，

$$3(x-1)-2(y-1)=0$$

$$\therefore\ 3(x-1)=2(y-1)$$

となり，$3(x-1)$ は2で割り切れるから $x-1$ が2で割り切れることになる．

そこで $\dfrac{x-1}{2}=m$ とおくと $y-1=3m$ となり，

$$(x,\ y)=(2m+1,\ 3m+1) \qquad (m \text{ は整数})$$

を得る．

ガイド 上記のようにして，ただ1組の解 $(x,\ y)=(1,\ 1)$ から，その他のすべての解が得られる．しかし，

$$2x+4y=1$$

のように（左辺は偶数，右辺は奇数だから）整数解をもたない方程式もある．

そもそも方程式 $ax+by=c$ が整数解をもつかどうかについては ☞ C.4，C.5

A1.E3 方程式の整数解(2)

I． 方程式

$$xy=10$$

を満たす整数 $x,\ y$ の組をすべて求めよう．

10の約数は，1，2，5，10だから，x は $\pm1,\ \pm2,\ \pm5,\ \pm10$ のどれかである．したがって，

$$(x,\ y)=(\pm1,\ \pm10),\ (\pm2,\ \pm5),\ (\pm5,\ \pm2),\ (\pm10,\ \pm1)$$

を得る．（複号同順）

II．方程式

$$xy+2x=10$$

の整数解を求めるには，上式を

$$x(y+2)=10$$

のように書き換えて，次のような表を書けばよい．

x	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
$y+2$	-1	-2	-5	-10	10	5	2	1
y	-3	-4	-7	-12	8	3	0	-1

また，方程式

$$xy+2x-3y=16$$

は，

$$(x-3)(y+2)=10$$

のように変形することにより，上記と同様の方法で整数解を求めることができる．

A1.E4　方程式の整数解(3)

I．方程式

$$x^2+y^2=10$$

を満たす整数 x，y の組をすべて求めよう．

明らかに $x^2 \leqq 10$ であるから，x は，0，±1，±2，±3 のどれかである．このうち，対応する y の値が整数になるのは $x=\pm1$ $(y=\pm3)$ と $x=\pm3$ $(y=\pm1)$ である．よって

$$(x,\ y)=(1,\ \pm3),\ (-1,\ \pm3),\ (3,\ \pm1),\ (-3,\ \pm1)$$

を得る．

1°　上記において，円 $x^2+y^2=10$ 上の格子点（x，y 座標が整数である点）を求めたのである．$x^2 \leqq 10$ は y が実数となるための条件，すなわち，円の存在する x の範囲 である．

II．方程式

$$x^2+xy+y^2=3$$

の整数解を求める．

上式を y について（2 次方程式の解の公式で）解く．

$$y=\frac{1}{2}(-x\pm\sqrt{12-3x^2})$$

特に，実根条件 $12-3x^2\geqq 0$ から，x は 0，±1，±2 のどれかであることが分かる．

そこで対応する y の値を調べると次のようになる．

x	-2	-1	0	1	2
y	1	2 -1	$\pm\sqrt{12}$	1 -2	-1

よって，

$(x,\ y)=(-2,\ 1),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -1),\ (1,\ 1),\ (1,\ -2),$
$(2,\ -1).$

1°　$x^2+xy+y^2=3$ は楕円を表す．

（☞ 大学への数学Cニューアプローチ）

実根条件 $12-3x^2\geqq 0$ は，楕円の存在する x の範囲を与える．

A1.E5　余りに関する問題

I．x^2 を 5 で割った余りが 1 となるような整数 x をすべて求めよう．そのために x を 5 で割った商を q，余りを r とする，すなわち

$$x=5q+r$$

すると，

$$x^2=25q^2+10qr+r^2$$
$$=5(5q^2+2qr)+r^2$$

であるから，

x^2 を 5 で割った余り $=1$

$\Longleftrightarrow$ r^2 を 5 で割った余り $=1$

となる．ところが，$r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のうち上の条件を満たすものは $r=1,\ 4$ である．よって

$$x=5q+1,\ 5q+4 \quad (q \text{ は整数})$$

を得る．

II．上記のような計算を手際よく行うために，

$$x-y \text{ は } a \text{ で割り切れる}$$
$$\Longleftrightarrow x\equiv y \quad (\text{mod}.a)$$

と定め，「x と y は（a を法として）**合同**である」ということにする．すなわち，x と y を a で割った余りが等しいときに，x と y は“似ている”と考え，「合同」というのである．

1°　mod. は，「法として」を意味するラテン語 modulo の省略形であるが，最近は，

$x\equiv y \text{ mod } a$　　あるいは　　$x\equiv y\ (a)$

などとさらに省略が進む傾向にある．

このような式（合同式という）は次の性質をもつ．

(1)　$x\equiv x\ (\text{mod}.a)$

(2)　$x\equiv y\ (\text{mod}.a) \Longrightarrow y\equiv x\ (\text{mod}.a)$

(3)　$x\equiv y\ (\text{mod}.a)$ かつ $y\equiv z\ (\text{mod}.a) \Longrightarrow x\equiv z\ (\text{mod}.a)$

(4)　$\begin{cases} x\equiv x'\ (\text{mod}.a) \\ y\equiv y'\ (\text{mod}.a) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\pm y\equiv x'\pm y'\ (\text{mod}.a) \\ xy\equiv x'y'\quad (\text{mod}.a) \end{cases}$

証明はどれも簡単である，例えば(4)においては

$$x'-x=ma$$
$$y'-y=na$$

とおくと，

$$x'y'-xy=(x+ma)(y+na)-xy$$
$$=(my+nx)a+mna^2$$

となり，$x'y'-xy$ は a で割り切れることが分かる．

III. 合同式を用いると，I の議論は次のように見やすくなる．

問題は，合同式

$$x^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

解くことである．

x は(5 を法として) 0，±1，±2 のどれかと合同であるが，

$$x \equiv 0 \pmod{5} \Longrightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{5}$$
$$x \equiv \pm 1 \pmod{5} \Longrightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{5}$$
$$x \equiv \pm 2 \pmod{5} \Longrightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

であるから，上の合同式の解として

$$x \equiv \pm 1 \pmod{5}$$

を得る．

――A1　おわり――



Repos

「どっちが美しいか？」

「数と式」の単元で必ず学ぶ公式に

i)　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
ii)　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

があるが，ii)はｉ)に比べて「格下」に，せいぜい「同格」に扱われがちである．

もちろん，b のかわりに $-b$ とおけば，一方から他方が演繹できるのであるから，この2つを見ている限りでは，どうでも良いのだが，これらを

$$a^n+b^n,\quad a^n-b^n$$

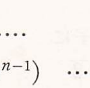
の因数分解(展開)の公式の特別の場合と見なすと，風景が変わってくる．すなわち，ii)は

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})\quad\cdots\cdots(*)$$

という重要な公式の，$n=3$ の場合であるのに対し，(＊)に対応する a^n+b^n の因数分解公式は，n が奇数の場合にしか作ることができない．しかも(＊)で，$a=1$，$b=r$ とおいて得られる

$$1-r^n=(1-r)(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-3}+r^{n-2}+r^{n-1})$$

は，等比数列の和の求めるための基本原理なのである！



B.101

次の式を簡単にせよ．

(1) $2\sqrt{12}-3\sqrt{48}+\sqrt{147}$　　(2) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　　(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$

アプローチ 根号 (root) で表される数の基本的な計算については，中学で学んでいます．新たに学ぶことは，(3)以降の“分母の有理化”です．

解答 (1) $2\sqrt{12}-3\sqrt{48}+\sqrt{147}$

$=2\sqrt{2^2\times3}-3\sqrt{4^2\times3}+\sqrt{7^2\times3}$

$=4\sqrt{3}-12\sqrt{3}+7\sqrt{3}=\mathbf{-\sqrt{3}}$

(2) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=3\sqrt{6}+3\times2-3-\sqrt{6}=\mathbf{3+2\sqrt{6}}$

分母・分子に $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ をかけた．

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=\mathbf{5-2\sqrt{6}}$

(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

分母・分子に $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ をかけた．

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}$

$=\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\mathbf{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

各項をそれぞれ有理化．

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{4}$

$=\mathbf{\sqrt{5}-1}$

B.102

次の 2 数の大小を調べよ．

(1)　$3+\sqrt{20}$，$\sqrt{56}$

(2)　$\sqrt{3+\sqrt{2}}$，$2\sqrt{\dfrac{11}{10}}$

アプローチ　(1)　$3+\sqrt{20}=3+2\sqrt{5}$

$$\fallingdotseq 3+2\times 2.23=7.46$$

$$\sqrt{56}=2\sqrt{14}\fallingdotseq 2\times 3.74=7.48$$

と近似値を覚えていけば，2 数の大小を判断できますが，記憶だけでは証明になりません．

平方根を含まない形にして比較するのです．そのために，2 乗したものの大小を比較しましょう．

解答　(1)　$(3+\sqrt{20})^2-(\sqrt{56})^2$

$$=(29+6\sqrt{20})-56=6\sqrt{20}-27 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ところで，

$$(6\sqrt{20})^2-27^2=720-729=-9<0$$

より，

$$(6\sqrt{20})^2<27^2 \quad \therefore \quad 6\sqrt{20}<27 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となるので，①，②から，

$$(3+\sqrt{20})^2<(\sqrt{56})^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{3+\sqrt{20}<\sqrt{56}}.$$

(2)　$(\sqrt{3+\sqrt{2}})^2-\left(2\sqrt{\dfrac{11}{10}}\right)^2$

$$=3+\sqrt{2}-\frac{44}{10}=\sqrt{2}-\frac{7}{5} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，

$$(\sqrt{2})^2-\left(\frac{7}{5}\right)^2=2-\frac{49}{25}=\frac{1}{25}>0$$

より，

$$(\sqrt{2})^2>\left(\frac{7}{5}\right)^2 \quad \therefore \quad \sqrt{2}>\frac{7}{5} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となるので，①，②から，

$$(\sqrt{3+\sqrt{2}})^2>\left(2\sqrt{\frac{11}{10}}\right)^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\sqrt{3+\sqrt{2}}>2\sqrt{\frac{11}{10}}}.$$

B.103

(1)　$\sqrt{2}$ の小数第 2 位までの正確な数値は 1.41 であることを証明せよ．

(2)　$\sqrt{5}$ の小数第 3 位までの正確な数値は 2.236 であることを証明せよ．

アプローチ　$\sqrt{2}$ の小数第 2 位までの正確な数値が 1.41 であるとは，小数第 3 位以下を切り捨てた値が 1.41 に等しいということです．

なお，普及型の電卓でも [2][√] とキーを押せば，

[1.414213562] などと表示されますから，本問は実用的には無意味ですが，理論的には大切です．

解答　(1)　$\begin{cases} 1.41^2=1.9881 \\ 1.42^2=2.0164 \end{cases}$

より，

$$1.41^2<2<1.42^2$$

したがって，

$$1.41<\sqrt{2}<1.42$$

が成り立つ．

よって，$\sqrt{2}$ の小数第 2 位までの正確な数値は

1.41　である．■

(2)　$\begin{cases} 2.236^2=4.999696 \\ 2.237^2=5.004169 \end{cases}$

より，

$$2.236^2<5<2.237^2$$

したがって，

$$2.236<\sqrt{5}<2.237$$

が成り立つ．

よって，$\sqrt{5}$ の小数第 3 位までの正確な数値は

2.236　である．■

［注］　前問 B.102 と本問の解答は，ともに

$a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき

$$a \leqq b \iff a^2 \leqq b^2$$

という事実に基づいている．

B.104

$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ の小数部分を a とおくとき，

$b=a^2+6a+8$ の値を求めよ．

アプローチ 「$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}=1.73205\cdots\cdots+1.41421\cdots\cdots$

$=3.1462\cdots\cdots$ であるから，$a=0.1462\cdots\cdots$ である．」

まちがってはいませんが，これでは，a^2+6a+8 の正確な値を知ることはできません．正の実数 x に対し，その整数部分を n とすれば，小数部分はどのように表せるのでしょうか？

解答　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ とおくと，分母の有理化により

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

である．ここで

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots,\ \sqrt{3}=1.7320\cdots\cdots$$

を考慮すると，x の整数部分は3である．

◀近似値を使わない解法については，☞［注］

したがって

$$a=x-3$$

$$\therefore\quad a=\sqrt{3}+\sqrt{2}-3$$

である．ゆえに

$$a+3=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad (a+3)^2=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

$$\therefore\quad a^2+6a+9=5+2\sqrt{6}$$

となるので，

$$b=(a^2+6a+9)-1=\mathbf{4+2\sqrt{6}}.$$

［注］　$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ の近似値を利用する上の方法は，「……」という部分がいささか心もとない．この部分を厳密に議論するには，前問 B.103 と同様にまず不等式

$$1.4<\sqrt{2}<1.5$$

$$1.7<\sqrt{3}<1.8$$

を証明し，これから

$$3.1<x<3.3$$

を導けば x の整数部分が3であるといえる．

B.105

(1) mを平方数でない正の整数とするとき，$\sqrt{m}$ は無理数であることを素因数分解の一意性を利用して示せ．

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることを示せ．

アプローチ 実数xが無理数であるとは，整数a，bを用いて，$x=\dfrac{b}{a}$ と表すことができない，ということです，したがって，xが無理数であることを証明するには，$x=\dfrac{b}{a}$(a，bはある整数)と表せたと仮定して，矛盾を導けばよいのです．☞ A1.18 III 背理法

▶ mが有理数であったとする．

解答 (1) $\sqrt{m}=\dfrac{b}{a}$ (a，b：ある整数)

と表すことができたとすると，これより

$$\sqrt{m}\,a=b$$

$$\therefore \quad ma^2=b^2 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が導かれる．①の両辺を素因数分解すると，任意の素数pについて，a^2，b^2に含まれるpの累乗の指数は偶数であるから，①が成立するためには，mに含まれるpの累乗の指数も偶数でなければならない．

▶ 0も偶数として数えている．

しかるに任意の素数について，それの偶数乗を因数にもつ整数mは，平方数であるから，mについての仮定と矛盾する．

ゆえに，$\sqrt{m}$ は無理数である．■

(2) $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおく．

$$x^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \qquad \therefore \quad x^2=2+2\sqrt{6}+3$$

$$\therefore \quad \frac{x^2-5}{2}=\sqrt{6} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

xが有理数であるとすると，②の左辺も有理数であるはずだが，(1)より，②の右辺は無理数であるので，矛盾する．

ゆえに，$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である．■

[注] (1)は「mが平方数でないことから，mを素因数分解したとき，少なくとも1つの素数p_0の累乗の指数が奇数であるとする．すると，①の両辺を素因数分解したとき，p_0の累乗の指数が，左辺は奇数，右辺は偶数になって矛盾」と証明を運ぶこともできる．

B.106

(1)　x，y，x'，y' を有理数，α を無理数とするとき，

$$x+y\alpha=x'+y'\alpha \text{ ならば，} x=x' \text{ かつ } y=y'$$

であることを示せ．

(2)　$(x+y\sqrt{2})^2=6+\sqrt{32}$ を満たす有理数 x，y を求めよ．

(3)　$(x+y\sqrt{3})^3=26-15\sqrt{3}$ を満たす整数 x，y を求めよ．

アプローチ　(1)では，x，y，x'，y' が有理数という仮定が本質的です．x'，y' が無理数であってもよいとすれば，

$$3+2\cdot\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}+2)\cdot\sqrt{2}$$

のような例があります．(2)，(3)は(1)の応用です．

解答　**(1)**　$x+y\alpha=x'+y'\alpha$　……… ①

とする．いま，$y \neq y'$ であると仮定すると，①より

$$\alpha=-\frac{x-x'}{y-y'} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

が得られる．x，y，x'，y' が有理数であることから②の右辺は有理数でなければならないが，これは α の仮定と矛盾する．ゆえに，$y=y'$ でなければならない．すると，また①より $x=x'$ でもなければならない．■

(2)　$(x+y\sqrt{2})^2=6+\sqrt{32}$

$\therefore$　$(x^2+2y^2)+2xy\sqrt{2}=6+4\sqrt{2}$

ここで，左辺に現れる x^2+2y^2，$2xy$ は有理数であるから，(1)で証明した事実により

$$\begin{cases} x^2+2y^2=6 \\ 2xy=4 \end{cases}$$

でなければならない．この連立方程式を解いて，

$(x,\ y)=(\mathbf{2},\ \mathbf{1}),\ (\mathbf{-2},\ \mathbf{-1})$　の2組を得る．

◀ $\sqrt{6+\sqrt{32}}=2+\sqrt{2}$ がわかった！

(3)　上と同様に，

$$(x^3+9xy^2)+(3x^2y+3y^3)\sqrt{3}=26-15\sqrt{3}$$

$$\therefore \begin{cases} x(x^2+9y^2)=26 & \cdots\cdots\cdots ① \\ y(x^2+y^2)=-5 & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

◀ 整数は有理数

ところで，②を満たす整数 x，y は，$\begin{cases} y=-1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

を満たす $(x,\ y)=(2,\ -1),\ (-2,\ -1)$ のみである．

よって，①を考慮して，$(x,\ y)=(\mathbf{2},\ \mathbf{-1})$ を得る．

◀ $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ がわかった！

B.107

次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x-2| \leqq 3$　　(2) $|2x-1| \geqq 3$

アプローチ 実数 a の絶対値 $|a|$ の確認の問題です．

解答 （1） (i) $x-2 \geqq 0$ つまり，$x \geqq 2$ のとき，

$x-2 \leqq 3$　$\therefore$　$x \leqq 5$

よって，$2 \leqq x \leqq 5$　………①

(ii) $x-2<0$ つまり，$x<2$ のとき，

$-(x-2) \leqq 3$　$\therefore$　$x \geqq -1$

よって，$-1 \leqq x < 2$　………②

求める x の範囲は ①または②，すなわち，

$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 5}$.

（2） (i) $2x-1 \geqq 0$ つまり，$x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，

$2x-1 \geqq 3$　$\therefore$　$x \geqq 2$　………①

これは，$x \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たしている．

(ii) $2x-1<0$ つまり，$x<\dfrac{1}{2}$ のとき，

$-(2x-1) \geqq 3$　$\therefore$　$x \leqq -1$ ………②

これも $x<\dfrac{1}{2}$ を満たしている．

よって，求める x の範囲は ①または②，すなわち，

$\boldsymbol{x \geqq 2}$ **または** $\boldsymbol{x \leqq -1}$.

［注］ 1° 一般に，実数 a に対して

$$|x| \leqq a \iff -a \leqq x \leqq a$$
$$|x| \geqq a \iff x \geqq a \text{ または } x \leqq -a$$

が成り立つ．この事実を用いると本問はより効率良く処理できる．

(1) $|x-2| \leqq 3 \iff -3 \leqq x-2 \leqq 3$
$\iff -1 \leqq x \leqq 5$

(2) $|2x-1| \geqq 3 \iff 2x-1 \geqq 3$ または $2x-1 \leqq -3$
$\iff x \geqq 2$ または $x \leqq -1$

2° 与えられた不等式は両辺が負でないので，その両辺を平方して得られる　(1) $(x-2)^2 \leqq 9$　(2) $(2x-1)^2 \geqq 9$　と同値となる．

(☞ B.103［注］)

B.108

次の式を因数分解せよ．

(1)　x^3-3x^2+2x　　(2)　$2x^2+3x+1$

(3)　$6x^2-7xy-3y^2$　　(4)　x^3+3x^2+3x+1

(5)　$x^3-6x^2+12x-8$　　(6)　x^3+1

(7)　$27x^3-8y^3$

アプローチ　因数分解の公式

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$
$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$
$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

はマスターしていますか．

解答　(1)　$x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)$
$$=\boldsymbol{x(x-1)(x-2)}$$

(2)　$2x^2+3x+1=\boldsymbol{(x+1)(2x+1)}$

◀
$$\begin{array}{ccc} 1 & \times\ 1 & \to 2 \\ 2 & \ \ \ 1 & \to 1 \\ \hline & & 3 \end{array}$$

(3)　$6x^2-7xy-3y^2=\boldsymbol{(2x-3y)(3x+y)}$

◀
$$\begin{array}{ccc} 2 & \times\ (-3y) & \to -9y \\ 3 & y & \to 2y \\ \hline & & -7y \end{array}$$

(4)　$x^3+3x^2+3x+1=\boldsymbol{(x+1)^3}$

◀直接公式に頼らずとも，
$x^3+1+3x(x+1)$
$=(x+1)\times(x^2-x+1)+3x(x+1)$
$=(x+1)\times(x^2+2x+1)$
$=(x+1)^3$
とゆっくり(?!)因数分解してもよい．

(5)　$x^3-6x^2+12x-8$
$=x^3-3x^2\cdot2+3x^2\cdot2^2-2^3=\boldsymbol{(x-2)^3}$

(6)　x^3+1
$=x^3+1^3=\boldsymbol{(x+1)(x^2-x+1)}$

(7)　$27x^3-8y^3$
$=(3x)^3-(2y)^3$
$=(3x-2y)\{(3x)^2+3x\cdot2y+(2y)^2\}$
$=\boldsymbol{(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)}$

B.109

次の式を因数分解せよ．

(1)　x^4-20x^2+64　　(2)　$(x^2+6x+3)(x^2+6x+7)+4$

(3)　$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-24$　(4)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$

アプローチ　(2)，(3)を実直に(?!)展開してしまうと大変です．(1)と同様な"置き換え"が必要です．また，(4)では，等式

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

を利用します．

解答　**(1)**　$x^2=X$ とおくと，

$$\begin{aligned}x^4-20x^2+64&=X^2-20X+64\\&=(X-4)(X-16)\\&=(x^2-4)(x^2-16)\\&=\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x+4)(x-4)}\end{aligned}$$

(2)　$x^2+6x=X$ とおくと，

$$\begin{aligned}&(x^2+6x+3)(x^2+6x+7)+4\\&=(X+3)(X+7)+4\\&=X^2+10X+25\\&=(X+5)^2\\&=(x^2+6x+5)^2\\&=\{(x+1)(x+5)\}^2=\boldsymbol{(x+1)^2(x+5)^2}\end{aligned}$$

(3)　$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-24$

$=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}-24$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-24$　◀ (2)の形になった．

ここで，$x^2+2x=X$ とおくと，

$$\begin{aligned}&(X-3)(X-8)-24\\&=X^2-11X\\&=X(X-11)\\&=(x^2+2x)(x^2+2x-11)\\&=\boldsymbol{x(x+2)(x^2+2x-11)}\end{aligned}$$

(4)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$　◀ $(x+y)^3+z^3$ を因数分解．

$=(x+y+z)\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2\}-3xy(x+y+z)$

$=\boldsymbol{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}$

B. 110

次の式を因数分解せよ．

(1)　x^4+x^2+1　　(2)　x^4+5x^2+9

(3)　x^4-6x^2+1　　(4)　$x^4-11x^2y^2+y^4$

アプローチ　一見，因数分解できそうにありませんが，ちょっとした式変形により，a^2-b^2 の形になります．

解答　(1)　x^4+x^2+1

$=(x^4+2x^2+1)-x^2$

$=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$

$=\boldsymbol{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

◀ x^2 と 1 を $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ の a と b とみる．

(2)　x^4+5x^2+9

$=(x^4+6x^2+9)-x^2$

$=(x^2+3)^2-x^2$

$=(x^2+3+x)(x^2+3-x)$

$=\boldsymbol{(x^2+x+3)(x^2-x+3)}$

(3)　x^4-6x^2+1

$=(x^4-2x^2+1)-4x^2$

$=(x^2-1)^2-(2x)^2$

$=(x^2-1+2x)(x^2-1-2x)$

$=\boldsymbol{(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)}$

◀ x^4 と 1 を $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ の a^2 と b^2 とみる．

(4)　$x^4-11x^2y^2+y^4$

$=(x^4-2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2$

$=(x^2-y^2)^2-(3xy)^2$

$=(x^2-y^2+3xy)(x^2-y^2-3xy)$

$=\boldsymbol{(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)}$

[注]　(3)，(4)を(1)，(2)と全く同様に変形すると，

(3)　$x^4-6x^2+1=(x^2+1)^2-8x^2$

$=(x^2+1+2\sqrt{2}x)(x^2+1-2\sqrt{2}x)$

(4)　$x^4-11x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-13x^2y^2$

$=(x^2+y^2+\sqrt{13}xy)(x^2+y^2-\sqrt{13}xy)$

となる．係数が有理数の範囲に入っていないが，これらも立派な因数分解である．上の解答との見かけ上の違いは，1次式の積の形まで因数分解を進めれば，解消される．

B.111

次の式を因数分解せよ．

(1) x^2-1 (2) x^3-1

(3) x^4-1 (4) x^6-1

アプローチ (1)，(2)は簡単でしょう．(3)，(4)は(1)，(2)の利用です．

解答 (1) $x^2-1=\boldsymbol{(x-1)(x+1)}$

(2) $x^3-1=\boldsymbol{(x-1)(x^2+x+1)}$

(1)を利用．▶ (3) $x^4-1=(x^2)^2-1=(x^2-1)(x^2+1)$

(2)を利用．▶ $=\boldsymbol{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

(4) $x^6-1=(x^3)^2-1=(x^3-1)(x^3+1)$

$=\boldsymbol{(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)}$

［注］ (4)において，x^6 を $(x^3)^2$ でなく，$(x^2)^3$ と考えると，

$$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$$
$$=(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$$

となり，「ここで完了！」としてしまいそうだが，x^4+x^2+1 は，まだ因数分解できる！ ☞ B.110 (1)

研究 $f_n(x)=x^n-1$ とおけば，(1)～(4)は，それぞれ $f_n(x)$ の $n=2,\ 3,\ 4,\ 6$ の場合である．

上の結果から“$f_n(x)$ は，つねに $x-1$ を因数にもつ”と推測できる．(因数定理(A 1. 10 II)を考慮すれば，証明は明らか．)

そこで，上の結果を $x-1$ ともう一つの因数の積の形にすると，

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

となる．このことから，一般に

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x^2+x+1)$$

という公式を予想することは難しくあるまい．これは，やがて学ぶ等比数列の和の公式の基礎になる．

B.112

(1)　x^5-1 を有理係数の範囲で因数分解せよ．

(2)　x^5-1 を実係数の範囲で因数分解せよ．

アプローチ　どこまで因数分解したら終わりか――それは，整式の係数を，どんな集合で考えるかによって変わります．

解答　(1)　$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

有理係数の範囲では，もうこれ以上因数分解できない．

(2)　$x^4+x^3+x^2+x+1$ が，いわゆる相反型であることに注目して，次のように変形する．

$$\begin{aligned}&x^4+x^3+x^2+x+1\\&=x^2\left(x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\}\qquad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

◀ $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ という形の4次式を相反型という．

ここで，$x+\dfrac{1}{x}=X$ とおいたとき，2次式

X^2+X-1 が，

$$X^2+X-1=\left(X-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

と因数分解できることに注意すると，①は，

$$\begin{aligned}&x^2\left(x+\frac{1}{x}-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\\&=\left(x^2+1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(x^2+1-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x\right)\end{aligned}$$

◀ $x^4+x^3+x^2+x+1$ の因数分解

と変形できる．

ゆえに，

$$\begin{aligned}&x^5-1\\&=(x-1)\left(x^2-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right).\end{aligned}$$

研究　複素係数の範囲では，分解をもっと押し進めることができる．たとえば，最後の因数である2次式 $x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1$ は，

$$\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,i}{4}\right)$$

と因数分解される．

B.113

次の各式を因数分解せよ．

(1) $x^2+xy-2y^2+2x+7y-3$

(2) $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

(3) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

アプローチ たくさんの文字を含む式についての因数分解では，ある **1つの文字について整理** するのが解決の原則です．

解答 (1) 与式$=x^2+(y+2)x-(2y^2-7y+3)$ ◀ xについて整理．

$=x^2+(y+2)x-(2y-1)(y-3)$ ◀ "定数項"の因数分解．

$=\{x+(2y-1)\}\{x-(y-3)\}$

$=\boldsymbol{(x+2y-1)(x-y+3)}$

(2) 与式$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4-2b^2c^2+c^4)$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2$

$=a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b+c)^2(b-c)^2$

$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$ ◀ $(b+c)^2+(b-c)^2=2(b^2+c^2)$

$=\boldsymbol{(a+b+c)(a-b-c)}$
$\quad\boldsymbol{\times(a+b-c)(a-b+c)}$

(3) 与式をaについて整理すると，

与式$=(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$ ◀ $(b-c)$でくくれる．

$=(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$

{ }の中味をbについて整理すると， ◀ { }の中はbについては2次式．

$=(b-c)\{(c-a)b^2$
$\quad+c(c-a)b-a(c^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)\{b^2+c\cdot b-a(c+a)\}$ ◀ $(c-a)$でくくれる．

{ }の中味をcについて整理すると， ◀ { }の中はcについては1次式．

$=(b-c)(c-a)\{(b-a)c+(b^2-a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)\{c+(b+a)\}$ ◀ $(b-a)$でくくれる．

$=\boldsymbol{-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}$

B.114

$f(x)=36x^4+ax^3+18x+27$ が $2x+3$ で割り切れるように，係数 a の値を求めよ．

アプローチ 実際に多項式の割り算を実行すれば，商と余りを求めることができますから，そうしておいて，“余り＝0” という条件を考えるのも，まちがってはいません．しかし，本問のように商を求める必要がない場合には，もっと計算の楽な方法があります．

解答 $f(x)$ を $2x+3$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおけば，

$$36x^4+ax^3+18x+27=(2x+3)Q(x)$$

◀割り切れる，という仮定から．

という等式が，x のすべての値に対して成り立つ．

よって，特に，

$$x=-\frac{3}{2}$$

を代入した式も成り立つはずである．

すなわち，

$$36\left(-\frac{3}{2}\right)^4+a\left(-\frac{3}{2}\right)^3+18\left(-\frac{3}{2}\right)+27=0$$

が成立する．これを解いて，

$$\boldsymbol{a=54}$$

を得る．

［注］ 一般に整式 $f(x)$ を1次式 $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とおくと，

$$f(x)=(ax+b)Q(x)+R$$

が，すべての x について成り立つので，特に，

$$x=-\frac{b}{a}$$

とおくと，

$$f\left(-\frac{b}{a}\right)=R$$

という関係式が得られる．つまり，余り R は，単なる代入の計算だけで求められるのである．☞ A1.10 II 剰余定理，因数定理

一方，商 $Q(x)$ を求めるためには，割り算を実際に実行する必要がある．

B.115

$P(x)=4x^5+ax^2+bx+c$ が x^2-1 で割り切れ，$x+2$ で割ると余りが -81 になるように，a，b，c の値を定めよ．

アプローチ 因数定理を利用すれば，割り算を実行しなくとも，割り切れるための条件が，表現できます．

解答 $x^2-1=(x-1)(x+1)$ で割り切れるとは，$x-1$，$x+1$ のいずれでも割り切れることである．

因数定理▶

$$\therefore \begin{cases} P(1)=4+a+b+c=0 & \cdots\cdots ① \\ P(-1)=-4+a-b+c=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

一方，$P(x)$ は，$x+2$ で割ると余りが -81 となるので，

剰余定理▶

$$P(-2)=-128+4a-2b+c=-81 \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③を a，b，c について解いて

$\boldsymbol{a=13}$，$\boldsymbol{b=-4}$，$\boldsymbol{c=-13}$

を得る．

B.116

整式 $P(x)$ を $x-1$，$x+2$ で割ったときの余りが，それぞれ，2，5 であるとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．

アプローチ 2 次式で割ったときの余りは，1 次以下の整式つまり，$ax+b$ とおくことができます．

解答 まず与えられた仮定より，

剰余定理▶

$$\begin{cases} P(1)=2 & \cdots\cdots ① \\ P(-2)=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

である．一方

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $q(x)$ 余りを $ax+b$ とおくと，

$$P(x)=(x-1)(x+2)q(x)+ax+b$$

が，すべての x について成り立つ．よって特に，

$$\begin{cases} P(1)=a+b & \cdots\cdots ③ \\ P(-2)=-2a+b & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

①，②，③，④より，$a=-1$，$b=3$．

ゆえに，求める余りは，$\boldsymbol{-x+3}$ である．

B.117

整式 $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると $x+1$ 余り，$x-2$ で割ると 5 余るという．$f(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

アプローチ 前問 B.116 の発展です．ここでも大切なことは，求める余りが，2 次以下の整式であるということです．

解答 $f(x)$ を 3 次式 $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りは，2 次以下の整式なので，商を $Q(x)$ として，

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

とかける．まず，$f(2)=5$ より，

$$5=4a+2b+c \qquad \cdots\cdots ①$$

次に，$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りは，ax^2+bx+c を $(x-1)^2$ で割った余りであるから，右のような割り算により，$(b+2a)x+c-a$ となる．これが，$x+1$ に等しいことより，

$$\begin{array}{r} a \qquad\qquad \\ x^2-2x+1\,\overline{)\,ax^2+\ \,bx+c} \\ \underline{ax^2-2ax+a} \\ (b+2a)x+c-a \end{array}$$

$$\begin{cases} b+2a=1 & \cdots\cdots ② \\ c-a=1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

よって，①，②，③から，

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=3 \end{cases}$$ となるので，求める余りは，

$$\boldsymbol{2x^2-3x+3}$$

である．

研究 「$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $x+1$ である」という条件を先に考えると，

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+x+1$$

($Q(x)$；整式，a；実数)

とおくことができる．

これに，条件 $f(2)=5$ を用いれば，

$$a+3=5 \qquad \therefore \quad a=2$$

となり，求める余りが

$$2(x-1)^2+x+1=2x^2-3x+3$$

と分かる．

B.118

$\alpha=5-3\sqrt{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　$\alpha^2-9\alpha+5$

(2)　$\alpha^4-9\alpha^3-3\alpha^2+11\alpha+3$

アプローチ▷ 式の値を求めるためには，「代入して実直に計算する」のが基本ですが，ちょっとした工夫により，計算の手間が軽減されます．

解答 $\alpha=5-3\sqrt{2}$ は，

$\alpha-5=-3\sqrt{2}$ より，

$(\alpha-5)^2=18$

$\therefore\quad \alpha^2-10\alpha+7=0$ ………①

を満たす．

(1) $\alpha^2-9\alpha+5=(\alpha^2-10\alpha+7)+\alpha-2$

$=\alpha-2$

α の値を代入．▶

$=5-3\sqrt{2}-2$

$=\mathbf{3-3\sqrt{2}}$．

(2) $F(x)=x^4-9x^3-3x^2+11x+3$ を 2 次式 $x^2-10x+7$ で割ると，

$F(x)=(x^2-10x+7)(x^2+x)+4x+3$

という式が恒等的に成立することが分かる．

よって，求めるべき値は，

$F(\alpha)=(\alpha^2-10\alpha+7)(\alpha^2+\alpha)+4\alpha+3$

①を代入．▶

$=0\times(\alpha^2+\alpha)+4\alpha+3$

$=4\alpha+3$

$=4(5-3\sqrt{2})+3$

$=\mathbf{23-12\sqrt{2}}$

である．

[注] (1)は，実際に代入して計算しても大差ないが，(2)では上の工夫(①を作ること)が，かなり効いてくることに注目したい．

B.119

$\begin{cases} x+y=2\sqrt{3} \\ xy=1 \end{cases}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1)　x^2+y^2　　(2)　x^3+y^3

(3)　x^4+y^4　　(4)　x^5+y^5

アプローチ　x，y の対称式(x と y を入れ換えても式が変わらないもの)は，その基本対称式：$x+y$ と xy の整式として表されるという事実のおかげで，x，y 自身の値を知らずとも，(1)～(4)の対称式の値が求められます．

解答　(1)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(2\sqrt{3})^2-2\times1$

$=\mathbf{10}$

(2)　$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(2\sqrt{3})^3-3\times1\times2\sqrt{3}$

$=\mathbf{18\sqrt{3}}$

(3)　$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=10^2-2\times1$　　◀(1)を利用．

$=\mathbf{98}$

(4)　$x^5+y^5=(x^4+y^4)(x+y)-xy(x^3+y^3)$

$=98\times2\sqrt{3}-1\times18\sqrt{3}$　　◀(2)，(3)を利用．

$=\mathbf{178\sqrt{3}}$

［注］　1°　(4)の式変形は，

$$x^n+y^n=(x^{n-1}+y^{n-1})(x+y)-xy(x^{n-2}+y^{n-2})$$

$(n=2,\ 3,\ 4\cdots\cdots)$

と一般化できる．これを(2)，(3)に適用すれば，

(2)　$x^3+y^3=(x^2+y^2)(x+y)-xy(x+y)$

(3)　$x^4+y^4=(x^3+y^3)(x+y)-xy(x^2+y^2)$

となる．

2°　x，y は t の2次方程式

$$t^2-2\sqrt{3}\,t+1=0$$

の2解であるので，

$\{x,\ y\}=\{\sqrt{3}+\sqrt{2},\ \sqrt{3}-\sqrt{2}\}$　である．

B.120

$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ．

(1) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ (2) $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ (3) $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$

(4) $\alpha^4+\dfrac{1}{\alpha^4}$ (5) $\alpha^5+\dfrac{1}{\alpha^5}$

アプローチ (2)以降では前問と同様な式変形が必要です．

解答 (1) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\mathbf{3}$

(2) $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2-2$

(1)を利用． ▶ $=3^2-2=\mathbf{7}$

(3) $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^3-3\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$

(1)，(2)を利用． ▶ $=3^3-3\times3=\mathbf{18}$

(4) $\alpha^4+\dfrac{1}{\alpha^4}=\left(\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)^2-2$

(2)を利用． ▶ $=7^2-2=\mathbf{47}$

B.119(4)と同じ式変形． ▶ (5) $\alpha^5+\dfrac{1}{\alpha^5}=\left(\alpha^4+\dfrac{1}{\alpha^4}\right)\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)-\left(\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)$

$=47\times3-18=\mathbf{123}$

［注］ 1° 本問は $\begin{cases}x+y=3\\ xy=1\end{cases}$ のとき

(2) x^2+y^2 (3) x^3+y^3 (4) x^4+y^4 (5) x^5+y^5

の値を求めるという問題（前問 B.119）と本質的に同じである．

2° $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ は $\alpha-\dfrac{3}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ より $\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$\therefore$ $\alpha^2-3\alpha+1=0$ を満たす．（☞ B.118）

これより，(1) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}=\dfrac{3\alpha}{\alpha}=3$ とすることもできる．

B.121

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=2 \\ xyz=3 \end{array}\right\}\text{のとき,}$$

次の各式の値を求めよ.

(1)　$x^2+y^2+z^2$

(2)　$x^3+y^3+z^3$

(3)　$x^4+y^4+z^4$

アプローチ　3つの文字を含む式においても,「対称式は,基本対称式で表すことができる」という事実があります.この事実のおかげで,x, y, z自身の値はわからなくとも(1)〜(3)の値が求められるのです.

解答　(1)　$x^2+y^2+z^2$

$$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$$
$$=0^2-2\cdot 2=\mathbf{-4}$$

(2)　$x^3+y^3+z^3$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$
$$=0\cdot(-4-2)+3\cdot 3=\mathbf{9}$$

(3)　$x^4+y^4+z^4$

$$=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$
$$=(x^2+y^2+z^2)^2-2\{(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\}$$
$$=(-4)^2-2\cdot(2^2-2\cdot 3\cdot 0)$$
$$=\mathbf{8}$$

［注］1°　(2)では

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+6xyz$$
$$=x^3+y^3+z^3+3(xy+yz+zx)(x+y+z)-3xyz$$

という式を用いる手もあるが,この式は,上で利用した公式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

と本質的に同じものである.

2°　実は,x, y, zは,3次方程式 $t^3+2t-3=0$ の3つの解であり,

$$\{x,\ y,\ z\}=\left\{1,\ \frac{-1+\sqrt{11}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{11}i}{2}\right\}$$ である.

B.122

$a+b+c=0$ のとき，式

$$F=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

の値を求めよ．

アプローチ $a+b+c=0$ という条件では，a，b，c の値は決まりません．それなのに，

$$F=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

の値は決まる，というのです．このことが不思議に思ったら，ためしに

$$a=1,\ b=1,\ c=-2\ ;\quad a=1,\ b=2,\ c=-3$$

などを代入してみましょう．

解答 与えられた仮定より，c は a，b を用いて

$$c=-a-b$$

と表せるので，これを用いると

$$F=\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)$$

c について整理してから代入する． ▶

$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{c}(a+b)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\frac{a^2+b^2}{ab}-1-\frac{(a+b)^2}{ab}$$

$$=-3$$

となる．

［注］ 次のように変形すれば，「c を消去する」という強引な方法によらずにFの値を求めることができる．

分母で整理． ▶

$$F=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$$

$a+b+c=0$ を利用． ▶

$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}$$

$$=-3$$

B.123

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z=a & \cdots\cdots\ ① \\ x^3+y^3+z^3=a^3 & \cdots\cdots\ ② \end{array}\right\}$$ の2式が成立するとき，

x，y，z のうち少なくとも1つは a に等しいことを示せ．

アプローチ　「x，y，z のうち少なくとも1つは a に等しい」という結論を導くのに，何を証明したら良いか見抜くことがポイントです．

解答　$(x-a)(y-a)(z-a)=0$

すなわち

$$xyz-a(xy+yz+zx)+a^2(x+y+z)-a^3=0 \quad \cdots\cdots\ (*)$$

を証明すればよい．

与えられた条件①，②を，恒等式

$$\begin{aligned} &x^3+y^3+z^3-3xyz \\ &=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\} \\ &=(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\} \end{aligned}$$

◀ ☞ A1.11
B.121 (2)

に代入すると

$$a^3-3xyz=a\{a^2-3(xy+yz+zx)\}$$

$$\therefore\quad xyz=a(xy+yz+zx)$$

が成立することがわかる．

ゆえに (*) が成立する．■

［注］ 1°　$z=a-(x+y)$ を②に代入して z を消去しても解決する．

2°　①，②の形に注目して，2次の対称式の値を

$$xy+yz+zx=b \quad \cdots\cdots\ ③$$

と指定すると，①，②，③より3次の対称式の値も

$$xyz=ab \quad \cdots\cdots\ ②'$$

と定まる．①，②′，③より x，y，z は t についての方程式

$$t^3-at^2+bt-ab=0$$

の3根である．

この方程式が $t=a$ という解をつねにもつことは，たやすくわかる．

B.124

$\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$ のとき，この式の値を求めよ．

アプローチ 3つの文字 a，b，c の間に成り立つ等式が2つ与えられているだけですから，a, b, c の値は，決まりません．しかし，この式の値は，決まってしまう，という不思議な古来有名な問題です．

$a=b=c=1$ や $a=b=c=2$ のような場合を考えれば，$\dfrac{1}{2}$ という値をとることは，すぐに納得できるでしょう．

解答 $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}=k$ とおくと

$$\begin{cases} a=k(b+c) & \cdots\cdots ① \\ b=k(c+a) & \cdots\cdots ② \\ c=k(a+b) & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．①+②+③ より

$$a+b+c=2k(a+b+c)$$

であるから，$a+b+c\neq 0$ のときは，$k=\dfrac{1}{2}$ でなければならない．

これは，$a=b=c$ ($\neq 0$) のときに起こる．

$a+b+c=0$ のときは，与えられた分数式

$\dfrac{a}{b+c}$，$\dfrac{b}{c+a}$，$\dfrac{c}{a+b}$ の値は，-1 となる．

$\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{a}{-a}=-1$

よって，求める式の値は，

$$-1 \quad \text{または} \quad \frac{1}{2}$$

であり，

前者は，$a+b+c=0$ かつ a，b，$c\neq 0$ のとき

後者は $a=b=c\neq 0$ のとき実現する．

［注］ 4つの文字 a，b，c，k についての

$$\begin{cases} a=k(b+c) \\ b=k(c+a) \\ c=k(a+b) \end{cases}$$

という連立方程式(未知数の個数の方が方程式の個数より多いので，当然，解は1つには決まらない)において，k の値だけは，2個に限定される．これが本問の核心である．

B.125

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ の各場合について，次式を簡単にせよ．

$$F_n=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$

解答　通分して，$F_n=\dfrac{G_n}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

とおく．ただし，

$$G_n=-\{a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)\}$$

◀ これは交代式．

である．

1)　$n=0$ の場合

$$G_0=-\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}=0$$

2)　$n=1$ の場合

$$G_1=-\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}=0$$

3)　$n=2$ の場合

$$\begin{aligned}G_2&=-\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}\\&=-\{(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)\}\\&=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=-(b-c)(a-b)(a-c)\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

◀ a について整理．

4)　$n=3$ の場合

$$\begin{aligned}G_3&=-\{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\}\\&=-\{a^3(b-c)-(b^3-c^3)a+(b^3c-bc^3)\}\\&=-\{a^3(b-c)-(b-c)(b^2+bc+a^2)a\\&\qquad\qquad+bc(b-c)(b+c)\}\\&=-(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}\\&=-(b-c)\{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}\\&=-(b-c)(a-b)\{a(a+b)-bc-c^2\}\\&=-(b-c)(a-b)\{-(c-a)(a+b)-c(c-a)\}\\&=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)\end{aligned}$$

以上から，

$$\boldsymbol{F_0=F_1=0,\ F_2=1,\ F_3=a+b+c}$$

を得る．

[注]　ここで示したのは「オイラーの分数式」という著名な関係である．

B.126

$x^4-4x^3-2x^2+px+q$ が完全平方式となるように，
定数 p，q の値を定めよ．

アプローチ 4次式が完全平方式であるとは，ある2次式の平方と書けるということです．

解答 x^4 の係数が1であることに注意して
$x^4-4x^3-2x^2+px+q=(x^2+mx+n)^2$　………(＊)
となる定数 m，n が存在するような，p，q の値を求めればよい．

まず，(＊)の右辺を展開すると

$$x^4+2mx^3+(m^2+2n)x^2+2mnx+n^2$$

となるので，

(＊)が成立するための条件は，

両辺の係数を比較．

$$\begin{cases} 2m=-4 & \cdots\cdots ① \\ m^2+2n=-2 & \cdots\cdots ② \\ 2mn=p & \cdots\cdots ③ \\ n^2=q & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

となることである．

①，②を満たす m，n は，

$$m=-2,\ n=-3$$

に限るので，これを③に代入した式が成り立つように p，q を決めればよい．

すなわち，

$$\boldsymbol{p=12,\ q=9.}$$

［注］(＊)の右辺のかわりに，

$$(l\,x^2+mx+n)^2$$

を考えてもよいが，どのみち x^4 の係数を比較した $l^2=1$ から，
$l=\pm1$ が出るので，初めから

$$l=1$$

と限定しておいても一般性を失なわないのである．

($l=-1$ の場合には，$m=2$，$n=3$ が得られるが $(-x^2+2x+3)^2$ は，$(x^2-2x-3)^2$ と同じなので，$l=-1$ の場合を考える利点がないのである．)

B.127

x，y の2次式 $6x^2+xy-y^2+kx-9y-20$ が，1次式の積に因数分解できるように実数 k の値を求めよ．

アプローチ x，y の1次式とは，$2x+3y-4$ のような形の式のこと．

解答 一般に x，y の2つの1次式

$$ax+by+c, \quad a'x+b'x+c'$$

の積は，

$$aa'x^2+(ab'+a'b)xy+bb'y^2+ \cdots\cdots +cc'$$

となる．つまり，展開式の2次の部分

$$aa'x^2+(ab'+a'b)xy+bb'y^2$$

は，

$$(ax+by)(a'x+b'y)$$

に等しい．この事実に注目して，まず，

$$6x^2+xy-y^2=(3x-y)(2x+y)$$

と因数分解し，

$$6x^2+xy-y^2+kx-9y-20$$
$$=(3x-y+p)(2x+y+q) \cdots\cdots (*)$$

とおく．右辺を展開すると

$$6x^2+xy-y^2+(2p+3q)x+(p-q)y+pq$$

となるので，(*)が成り立つのは

$$\begin{cases} k=2p+3q & \cdots\cdots ① \\ -9=p-q & \cdots\cdots ② \\ -20=pq & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

のときである．②と③を満たす p，q は　◀連立2次方程式

$$\begin{cases} p=-5 \\ q=4 \end{cases} \text{または} \begin{cases} p=-4 \\ q=5 \end{cases}$$

の2通りある．①より，求める k の値は

$$\boldsymbol{k=2} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{k=7}$$

である．

[注]　x，y の2次方程式 $6x^2+xy-y^2+kx-9y-20=0$ は，一般に，双曲線を表す．特に，$k=2$ または $k=7$ という値は，双曲線が漸近線にくっついてしまう，という特別の場合をひき起こすのである．

B.128

$$\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+1} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

が，恒等式となるような定数 a，b，c の値を求めよ．

アプローチ　分数式は，数学Aの範囲外ですが，この程度は経験しておくのも悪くありません．

解答　(∗)の右辺を通分した上で，両辺の分子を比較すると

$$4x^2=a(x-1)(x+1)+b(x+1)+c(x-1)^2 \quad \cdots\cdots(**)$$

となる．

これが恒等式であることから，特に

$x=1$；$x=-1$；$x=0$

とおいたときも成り立つ．

よって

$$\begin{cases}4=2b\\4=4c\\0=-a+b+c\end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases}\boldsymbol{a=3}\\\boldsymbol{b=2}\\\boldsymbol{c=1}\end{cases}$$

でなければならない．

逆に，このとき，(∗∗)の右辺は

$$\begin{aligned}&3(x-1)(x+1)+2(x+1)+(x-1)^2\\=&3(x^2-1)+2(x+1)+(x^2-2x+1)\\=&4x^2\end{aligned}$$

となり，確かに(∗)が恒等式となる．

［注］(∗∗)の右辺を x について

$$(a+c)x^2+(b-2c)x+(-a+b+c)$$

と整理してから係数を比較する方法もあるが，上の解答のようにうまい x の値を代入すると，複雑な計算をせずに結果に到達できる．「特別な3つの値について(∗∗)が成り立つ」という条件だけで，「恒等的に(∗∗)が成り立つ」ことが保証できないと思う人のために，最後に代入して検算したのであるが，実は，(∗∗)の両辺の次数を考慮すれば，この検算は不要である．☞ A1.13

B.129

任意の正の実数 x，y に対し，次のおのおのの不等式が成り立つことを示せ．

(1)　$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\geqq 4$

(2)　$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\geqq 9$

アプローチ　数学Aの範囲では，不等式を証明するときの原則は，

1 両辺の差をとり，それが定符号であることを示す．

2 適当な絶対不等式 (相加平均≧相乗平均 など) を利用する．

の2つです．

解答　(1)　$(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

$$=x\cdot\frac{1}{x}+x\cdot\frac{1}{y}+y\cdot\frac{1}{x}+y\cdot\frac{1}{y}$$

$$=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$\geqq 2+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}\quad(\text{相加平均≧相乗平均})$$

$$=2+2=4\ ■$$

◀ $a>0$，$b>0$ のとき $a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

(2)　$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$

$$=3+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$$

$$=3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)$$

$$\geqq 3+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}+2\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}$$

$$=3+2+2+2=9\ ■$$

[注]　(1)，(2)はそれぞれ $(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\geqq 2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{\dfrac{1}{xy}}$ や

$(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\geqq 3\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}}$ からもっていくこともできる．ここで示した不等式は，B.507 で学ぶコーシーの不等式の特別の場合である．

B.130

(1) 関数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ の最小値を求めよ．

(2) $x^2+y^2=2$ のとき，$z=xy$ の最大値，最小値を求めよ．

アプローチ いろいろな方法が考えられますが，最小値の定義

$$f(x)\text{ の最小値}=m \iff \begin{array}{l}\text{つねに不等式 } f(x)\geqq m \text{ が成り立ち，}\\ \text{しかも，この等号が成立するような}\\ x\text{ が存在する．}\end{array}$$

を思い出して，相加・相乗平均の不等式を利用してみましょう．

$a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のとき，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

解答 (1) $y=x+\dfrac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}$

$$\therefore\quad y\geqq 2$$

$\begin{cases} x=\dfrac{1}{x} \\ x>0 \end{cases}$ を解く．

ここで，等号は，$x=1$ のときに成立する．

よって，y の最小値は **2** である．

(2) 一般に，

実数 a に対し，$\sqrt{a^2}=|a|$

$$x^2+y^2\geqq 2\sqrt{x^2y^2}=2|xy|$$

であるが，$x^2+y^2=2$ であるので，

$$|xy|\leqq 1 \quad\cdots\cdots\text{①}$$

$$\therefore\quad -1\leqq xy\leqq 1 \quad\cdots\cdots\text{②}$$

が成り立つ．①の等号は，

$$x^2=y^2=1 \quad\cdots\cdots\text{③}$$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2=y^2 \end{cases}$ を解く．

のときに成立する．

③を満たす x，y の値の組のうち，

②の右側の等号が $(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$

②の左側の等号が $(x,\ y)=(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$

のときに成立する．

よって，$z=xy$ の

最大値＝1，最小値＝−1．

参考 (2)は数学IIで学ぶ三角関数を利用して解決することもできる．つまり，

$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $(0°\leqq\theta<360°)$ とおくと，$z=xy$ は

$$z=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$$

となるからである．

B.131

正数 x，y が $x+y=3$ を満たして変化するとき，

$z=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2$ の最小値を求めよ．

という問題に対するN君の答案の誤りを指摘せよ．

N君の答案

$x>0$ より，相加・相乗平均の不等式を用いると，

$$x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

$$\therefore\quad \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\geqq 4 \qquad \cdots\cdots①$$

同様にして，

$$y+\frac{1}{y}\geqq 2\sqrt{y\cdot\frac{1}{y}}=2$$

$$\therefore\quad \left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geqq 4 \qquad \cdots\cdots②$$

①＋②より，

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\geqq 4+4=8$$

$$\therefore\quad z\geqq 8 \qquad \cdots\cdots③$$

ゆえに，z の最小値は 8 である．

アプローチ 不等式としては，①も②も成り立つので，③も成り立ちます．しかし，これらは，“単なる不等式”に過ぎません！

解答 不等式③の等号は，①，②の等号が同時に成り立つときである．

①の等号は，　$x=1$ ……④

②の等号は，　$y=1$ ……⑤

のときに限ってそれぞれ成立するが，

$$x+y=3$$

の下では④，⑤が同時に成り立つことはない．

よって，③の等号は成立しない．

したがって，z の最小値が 8 であるとはいえない．

◀ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{x} \\ x>0 \end{cases}$ を解く．

B.132

関数 $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ $(x>1)$ の最小値を求めよ．

という問題に対するN君の答案の誤りを指摘し，正しい答案を作れ．

N君の答案

相加・相乗平均の不等式により，

$$y=x+\frac{1}{x-1}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x-1}}$$

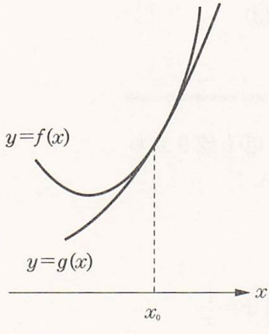
この等号は，$x=\dfrac{1}{x-1}$ かつ $x>1$

$$\therefore\ \begin{cases}x^2-x-1=0\\x>1\end{cases}\qquad\therefore\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

のときに成立する．

よって，このときの y の値

$y=1+\sqrt{5}$ 　　が求める y の最小値である．



アプローチ $\begin{cases}\text{つねに } f(x)\geqq g(x)\\ \text{等号が成立するのは } x=x_0 \text{ のとき}\end{cases}$

であるからといって，$x=x_0$ のとき $f(x)$ が最小値をとるとは言えません．

A君の身長はいつもB君以上で，2人が15才のときに同じになった．だからといって，A君の身長が15才のときに最も低いとは言えませんね．

解答 不等式 $x+\dfrac{1}{x-1}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x-1}}$ がつねに成り立つということは正しいが，右辺が定数でないので，等号が成り立つときに，左辺が最小になるとは言えない．正しくは，次のように解く．

（$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ ＝定数 の形を作るための変形．）

$$y=x+\frac{1}{x-1}=x-1+\frac{1}{x-1}+1$$

$$\geqq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1$$

$$\therefore\ y\geqq 3$$

（$\begin{cases}x-1=\dfrac{1}{x-1}\\x>1\end{cases}$ を解く．）

この等号は，$x=2$ のときに成立する．

よって，y の最小値は 3 である．

B.133

(1)　a, b, c を実数とする不等式 $3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2$ を証明せよ.

(2)　a, b, c は正の実数とする. 不等式 $a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc$ を証明せよ.

アプローチ　不等式の証明の原則は, B.129 で解説したとおりです. この程度の式の複雑さにひるむようではいけません.

解答　(1)　$3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2$

$$=3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$$

となるが, 最後の式はさらに

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$$

$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

◀この変形がポイント.

と変形できる. このことから

$$3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 \geqq 0$$

$$\therefore \quad 3(a^2+b^2+c^2) \geqq (a+b+c)^2. \ ■$$

(2)　まず, 両辺の差は

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

と変形できる. 右辺の第1因子は, a, b, c が正であることから正であり, 右辺の第2因子は,

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

◀(1)で経験した変形.

と変形できることから0以上である. ゆえに

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geqq 0$$

$$\therefore \quad a^3+b^3+c^3 \geqq 3abc. \ ■$$

[注]　1°　(1)で示した不等式は, 後に学ぶコーシの不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

の特別の場合である. ☞ B.507

2°　(2)の結果において, $a^3=A$, $b^3=B$, $c^3=C$ とおくと,

$$\frac{A+B+C}{3} \geqq \sqrt[3]{ABC}$$

が得られる.

これは3変数の場合の, 相加平均・相乗平均の不等式である.

B.134

$f(x)=x^2$ とおく

(1)　任意の実数 a，b に対し，不等式

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

が成り立つことを示せ．

(2)　任意の実数 x，y，z，w に対し，不等式

$$f\left(\frac{x+y+z+w}{4}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)+f(z)+f(w)}{4}$$

が成り立つことを(1)を利用して示せ．

(3)　任意の実数 x，y，z に対し，不等式

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$$

が成り立つことを(2)を利用して示せ．

アプローチ　(1)は問題ないはずです．(2)において(1)をどう利用するか，(3)において(2)をどう利用するか，がポイントです．

解答　**(1)**　$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{-(a-b)^2}{4}\leqq 0. \blacksquare$$

(2)　(1)の a，b にそれぞれ $\dfrac{x+y}{2}$，$\dfrac{z+w}{2}$ を代入すると

$$f\left(\frac{x+y+z+w}{4}\right)\leqq\frac{1}{2}\left\{f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{z+w}{2}\right)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が得られる．また(1)で示したように

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leqq\dfrac{f(x)+f(y)}{2} \\ f\left(\dfrac{z+w}{2}\right)\leqq\dfrac{f(z)+f(w)}{2} \end{cases}$$

◀ (1)で得た不等式の a，b を x，y や z，w に書きかえただけ．

であるから，これらを加えあわせて

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{z+w}{2}\right)$$

$$\leqq\frac{1}{2}\{f(x)+f(y)+f(z)+f(w)\} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

を得る．①，②より

$$f\left(\frac{x+y+z+w}{4}\right)\leqq\frac{f(x)+f(y)+f(z)+f(w)}{4}$$

が成り立つ．■

(3)　(2)で得た不等式の x，y，z，w のところにそれぞれ，x，y，z，$\dfrac{x+y+z}{3}$ を代入すると，

$$\begin{cases}\text{左辺}=f\left(\dfrac{x+y+z+\dfrac{x+y+z}{3}}{4}\right)\\ \qquad=f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)\\ \text{右辺}=\dfrac{f(x)+f(y)+f(z)+f\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)}{4}\end{cases}$$

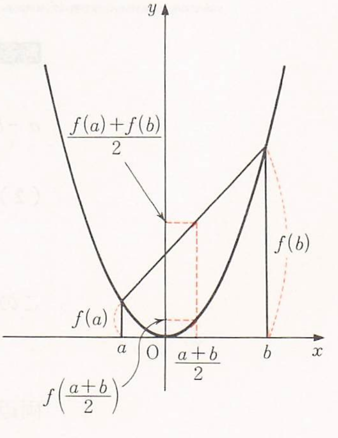
となる．この不等式を整理すると

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\leqq\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}$$

が得られる．■

研究　1°　(1)の不等式が成立することは，右のグラフを見れば，納得がいくだろう．

つまり，この不等式は，曲線 $y=f(x)$ が，下に凸であるという性質に対応している．



2°　(2)，(3)では，(1)の結果しか利用していないのでここで用いた論法は，(1)を満たすすべての関数 $f(x)$——たとえば，$f(x)=x^4$——に対しても有効である．

数学II の範囲であるが，$f(x)=-\log x$ をとれば，(1)，(2)，(3)の不等式は，それぞれ

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab},$$

$$\frac{x+y+z+w}{4}\geqq\sqrt[4]{xyzw},$$

$$\frac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$$

に対応している．

B.135

$a \geqq b \geqq c$ ……①，$x \geqq y \geqq z$ ……②，$x+y+z=0$ ……③

ならば

$$ax+by+cz \geqq 0$$

であることを証明せよ．

解答 ②，③より $x \geqq 0$ …… ④，$z \leqq 0$ ………⑤

である．③を用いて y を消去すると

$$ax+by+cz=ax-b(x+z)+cz$$
$$=(a-b)x+(b-c)(-z) \quad \cdots\cdots⑥$$

となる．ここで，①，④，⑤から

$$(a-b)x \geqq 0,\ (b-c)(-z) \geqq 0$$

であるから，⑥より $ax+by+cz \geqq 0$ を得る．■

B.136

次の不等式を証明せよ．

(1)　$a \geqq b$，$x \geqq y$ のとき，$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$

(2)　$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ のとき

$$(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$$

解答 （1）　$2(ax+by)-(a+b)(x+y)$

$$=ax+by-bx-ay=(a-b)(x-y)$$

$a-b \geqq 0$，$x-y \geqq 0$ より $(a-b)(x-y) \geqq 0$ である．

$$\therefore\ (a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by).\ ■$$

（2）　(1)より　$(a+b)(x+y) \leqq 2(ax+by)$

$$(b+c)(y+z) \leqq 2(by+cz)$$
$$(a+c)(x+z) \leqq 2(ax+cz)$$

この3式を辺々加えると

$$(2a+b+c)x+(a+2b+c)y+(a+b+2c)z$$
$$\leqq 4(ax+by+cz)$$

両辺から $ax+by+cz$ を引いて

$$(a+b+c)x+(a+b+c)y+(a+b+c)z$$
$$\leqq 3(ax+by+cz)$$

よって $(a+b+c)(x+y+z) \leqq 3(ax+by+cz)$．■

研究 上の不等式(1)において等号が成立するのは「$a=b$ または $x=y$」のときである．(2)においてはどうか？

B.137

(1)　x，y，z が正のとき，不等式

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqq 8xyz$$

が成り立つことを示せ．

(2)　ある三角形の3辺の長さを a，b，c とおくとき，不等式

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqq abc$$

が成り立つことを示せ．

アプローチ　(1)も(2)も左辺を展開してしまうと，かえって"先"が見えなくなってしまいます．(2)で，a，b，c が三角形の3辺の長さであるということは，$b+c-a$，$c+a-b$，$a+b-c$ がすべて正である，ということにほかなりません．

解答　(1)　$x>0$，$y>0$，$z>0$
より

$$\begin{cases} x+y \geqq 2\sqrt{xy} > 0 \\ y+z \geqq 2\sqrt{yz} > 0 \\ z+x \geqq 2\sqrt{zx} > 0 \end{cases}$$

が成り立つ．これら3つの不等式をかけあわせると

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqq 8xyz$$

が得られる．■

(2)

$$\begin{cases} x=b+c-a \\ y=c+a-b \\ z=a+b-c \end{cases}$$

とおくと，

$$x>0,\ y>0,\ z>0$$

であるから，(1)で示した不等式

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqq 8xyz$$

が成り立つ．これに a，b，c の式を代入すると

$$2c \cdot 2a \cdot 2b \geqq 8(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$$\therefore\ (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqq abc$$

が得られる．■

研究　a，b，c を3辺とする三角形の外接円の半径 R，内接円の半径 r の間に，不等式 $2r \leqq R$ が成り立つことを証明したことになる．(r，R を a，b，c および三角形の面積 S を用いて表してみればわかる．)

B.138

英語と数学の2科目の得点で順位を定める試験において，英語の得点を $x\,(0\leqq x\leqq 100)$，数学の得点を $y\,(0\leqq y\leqq 100)$ とするとき，ふつうは $w=\dfrac{1}{2}(x+y)$ の値を基準とする．

しかし $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ あるいは $v=\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2$ の値を規準とすることも考えられる．

(1) 1人の受験生について，u，v，w の大小を判定せよ．

(2) 2人の受験生について，w の値による順位と u の値による順位とが逆転することがあるか．

アプローチ 2数 x，y で定まる値 m が

$$x<y \Longrightarrow x<m<y \quad かつ \quad x=y \Longrightarrow x=m=y$$

を満たすならば，m を「x と y の平均」と呼ぼうと約束することは，それほど無茶ではないでしょう．この立場に立てば，本問の u や v も正数 x，y の「平均」の一種です．

解答 (1) $u^2-w^2=\dfrac{x^2+y^2}{2}-\dfrac{x^2+2xy+y^2}{4}$

$$=\frac{1}{4}(x-y)^2\geqq 0$$

となることから，

$$u\geqq w$$

である．同様に，

$$w-v=\frac{1}{4}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqq 0$$

実は，$u^2\geqq w^2$ の証明において x，y を $\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$ におきかえるだけでよい．

$$\therefore\quad w\geqq v$$

ゆえに，　$\boldsymbol{u\geqq w\geqq v}$ である．

(2) 平均 w では，2つの得点の効果が一様であるが，平均 u では，2乗の効果が効いて和が不変でも，偏りが大きくなると（偏った実力の持ち主！），u の値が増大する．その結果，たとえば，A：$x=y=60$，B：$x=100$，$y=0$ とすると，w では，A の方が上だが，u の方では，$A=60$，$B=50\sqrt{2}$ となり，B の方が上になる．

B.139

次の□にあてはまるものは，下の a，b，c，d のいずれか．ただし，x，y は実数とする．

(1)　$x>y$ であることは，$x^2>y^2$ であるために□．

(2)　$x>y$ であることは，$x^3>y^3$ であるために□．

(3)　$x>y$ であることは，$\sqrt{x}>\sqrt{y}$ であるために□．

a. 必要であるが十分でない　　b. 十分であるが必要でない

c. 必要かつ十分である　　d. 必要でも十分でもない

アプローチ　「必要」や「十分」は，2つの条件の間の論理的関係を表すことばですから，主語のとり方に注意しなければなりません．つまり，「条件 P は条件 Q であるために十分である」ということと「条件 Q は条件 P であるために必要である」ということは，まったく同じ意味をもっているのです．

ところで，本問は，「不等式の両辺を平方することができるか」という問題をめぐり，「両辺とも0以上ならできる」という常識的解答に警鐘をならすのが目的です．

解答　**(1)**　たとえば，

$$x=1,\ y=-2$$

のとき，$x>y$ であっても，$x^2>y^2$ とはならない．

他方，たとえば

$$x=-2,\ y=-1$$

のとき，$x^2>y^2$ であっても，$x>y$ とはならない．

$$\therefore \quad \boldsymbol{d}.$$

(2)　$x^3>y^3 \iff (x-y)(x^2+xy+y^2)>0$

であり，しかも

$(x,\ y)=(0,\ 0)$ を除いて $x^2+xy+y^2>0$

であることから

$$x^3>y^3 \iff x>y$$

である．　$\therefore$　$\boldsymbol{c}$.

◀ $x=y=0$ のときは $x^3>y^3$ も $x>y$ も成り立たない．

(3)　$\sqrt{x}>\sqrt{y}$ であれば，両辺とも0以上なので両辺を平方しても同じ向きの不等式，すなわち $x>y$ が成り立つが，逆に $x>y$ であっても，x，y が0以上とは限らないので，$\sqrt{x}>\sqrt{y}$ とはいえない．　$\therefore$　$\boldsymbol{a}$.

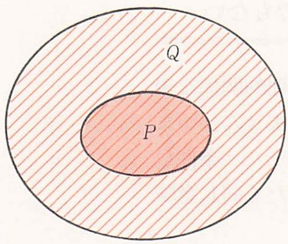
B.140

実数 x についての条件

$p(x)$: $x>a$

$q(x)$: $x^2>b$

がある．$p(x)$ が $q(x)$ の十分条件となるような実数の定数 a，b の満たすべき条件を求めよ．



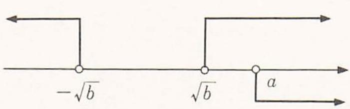
アプローチ "$p(x)$ が $q(x)$ の十分条件である" とは，"$p(x)$ を真とするすべての x に対し，$q(x)$ が真となる" ことにほかなりません．いいかえれば，$p(x)$ を真とする x の値の集合 P が，$q(x)$ を真とする x の値の集合 Q に集合として含まれる（部分集合である），ということです．

解答 条件 $x^2>b$ を満たす x の値の集合は，

$$\begin{cases} b<0 \text{ のときは，} & \text{実数全体} \\ b\geqq 0 \text{ のときは} & x<-\sqrt{b} \text{ または } \sqrt{b}<x \text{ の実数全体} \end{cases}$$

である．

ゆえに，



i）$b<0$ のときは，任意の実数 a に対し

$x>a$ ならばつねに $x^2>b$

が成り立つ．

ii）$b\geqq 0$ のときは，

$x>a$ ならばつねに $x^2>b$

が成り立つための条件は

$a\geqq\sqrt{b}$

となることである．

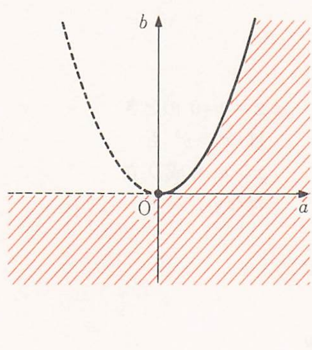
以上より，求める条件は，

$b<0$ または（$b\geqq 0$ かつ $a\geqq\sqrt{b}$）

であり，これは

$b<0$ または（$a^2\geqq b\geqq 0$ かつ $a\geqq 0$）

と表すこともできる．



B.141

(1)　次の各条件が成立するための，実数 a の範囲を求めよ．

　p：任意の実数 x について，$x \geqq 0$ ならば $x > a$

　q：任意の実数 x について，$x > 0$ ならば $x > a$

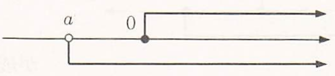
(2)　上の p と q はどんな論理的関係にあるか．

アプローチ　条件 p を満たす任意の x が条件 q を満たすとは，

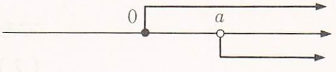
$$\{x \mid x \text{ は } p \text{ を満たす}\} \subseteqq \{x \mid x \text{ は } q \text{ を満たす}\}$$

という集合の包含関係が成り立つことです．

解答　(1)　数直線の上で，区間 $x \geqq 0$ が，区間 $x > a$ に含まれるための条件を求めればよい．



右のように，$a<0$ の場合，$a>0$ の場合の図をかけば，前者はその条件を満たし，後者は満たさないことがわかる．また，$a=0$ も満たさない．



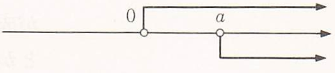
したがって，条件 p が成立する a の範囲は

$$\boldsymbol{a<0}$$

である．

q についても p と同じように

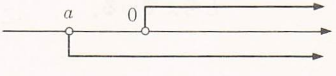
$$a>0\ ;\ a=0\ ;\ a<0$$



の場合に分けて考えれば，q が成立する a の範囲

$$\boldsymbol{a \leqq 0}$$

が得られる．



(2)　"$a<0$" が成立するときには "$a \leqq 0$" は成立するが，その逆はいえない．したがって，(1)で示したことから

◀ "$-1 \leqq 0$" は正しい不等式！

　p：任意の実数 $x \geqq 0$ について $x > a$

は，

　q：任意の実数 $x > 0$ について $x > a$

であるための十分条件ではあるが，必要条件ではない．

[注]「任意の実数 x について」という部分を読みとばすと，何をいっているのかサッパリわからなくなってしまう．

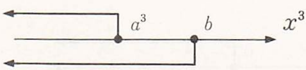
B.142

(1)　$x \leqq a$ を満たすすべての実数 x に対して，$x^3 \leqq b$ が成立するための定数 a，b の条件を求めよ．

(2)　$x+y \leqq k$ を満たすすべての実数 x，y に対し，$x^3+y^3 \leqq k$ が成立するよう実数 k の値の範囲を求めよ．

アプローチ　いきなり(2)を問われたら困る人は多いでしょう．y を定数と見なせば，(1)と同じ形になるということに気づきたいのです．

☞ B.139 (2)



解答　**(1)**　$x \leqq a$ は，$x^3 \leqq a^3$ と同値であることから，

$$x^3 \leqq a^3 \text{ ならば } x^3 \leqq b$$

が成立する条件を求めればよい．それゆえ，求める条件は

$$\boldsymbol{a^3 \leqq b}$$

である．

(2)　まず，y を定数と考えて，

$x \leqq k-y$ を満たすすべての x について

$$x^3 \leqq k-y^3$$

が成立するための条件を考えると，(1)で証明したことから

$$(k-y)^3 \leqq k-y^3$$

である．

（$a=k-y$，$b=k-y^3$ と考えている．）

これを y について整理すると

$$k(3y^2-3ky+k^2-1) \leqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる．

したがって①がすべての実数 y について成立するための条件を求めればよいが，これは

i）$k=0$ または

ii）$k<0$ かつ，すべての y について $3y^2-3ky+k^2-1 \geqq 0$

（忘れやすい．）

（$k>0$ のとき「すべての y について $3y^2-3ky+k^2-1 \leqq 0$」は不可能．）

と同値であるから，求める k の条件は

$k=0$ または

$(k<0$ かつ $(3k)^2-12(k^2-1) \leqq 0)$

となる．これを整理すると

$$\boldsymbol{k=0} \text{ または } \boldsymbol{k \leqq -2}.$$

B.143

(1)　最小公倍数が 360，最大公約数が 60 である 2 数 x，y $(360>x>y)$ を求めよ．

(2)　最小公倍数が 360，最大公約数が 60 である 3 数 x，y，$z\,(360>x>y>z)$ を求めよ．

アプローチ　2 数 x，y の最大公約数を d とおくと

$$x=dx',\ y=dy'\quad (x',\ y'\text{ は互いに素})$$

という形に表すことができ，最小公倍数は，$dx'y'$ となります．

解答　(1)　最大公約数が 60 だから

$$x=60x',\ y=60y'\quad (x',\ y'\text{ は互いに素})$$

とおくことができる．x，y の最小公倍数が 360 であるので

$$60x'y'=360\qquad \therefore\quad x'y'=6$$

である．さらに，

$$360>x>y\qquad \therefore\quad 6>x'>y'$$

となることも考えると，

$$x'=3,\ y'=2$$

である．ゆえに

$$\boldsymbol{x=180,\ y=120.}$$

(2)　$x=60x'$，$y=60y'$，$z=60z'$

とおけば

最小公倍数が 6，最大公約数が 1 の 3 数 x'，y'，z' $(6>x'>y'>z')$ を決定する問題に帰着される．

この問題の答えは，

$$x'=3,\ y'=2,\ z'=1$$

であるから，求める x，y，z は，

$$\boldsymbol{x=180,\ y=120,\ z=60.}$$

[注]　(1)で，$360=2^3\cdot3^2\cdot5$，$60=2^2\cdot3\cdot5$ と素因数分解されることに注目して，$x=2^a\cdot3^b\cdot5^c$，$y=2^{a'}\cdot3^{b'}\cdot5^{c'}$ とおけば，

$$\begin{cases}\max(a,\ a')=3,\ \min(a,\ a')=2\\ \max(b,\ b')=2,\ \min(b,\ b')=1\\ \max(c,\ c')=\min(c,\ c')=1\end{cases}$$

という整数 a，b，c，a'，b'，c' を決定する，という問題になる．

(2)も同様．

B.144

方程式

$$18x-5y=1 \quad \cdots\cdots ①$$

を考える．

(1) ①を満たす整数 x，y の組を1つ見つけよ．

(2) ①を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ．

アプローチ (1) $x=1$ とすると y は整数になりません．それでは….
(2) ☞ A1.E 2

解答 (1) $(x,\ y)=(2,\ 7)$

(2) ①と

$(x,\ y)=(2,\ 7)$ を①に代入した形 ▶

$$18\cdot 2-5\cdot 7=1$$

の差をとると

①⟺② ▶

$$18(x-2)-5(y-7)=0 \quad \cdots\cdots ②$$

18と5は互いに素． ▶ となり，$x-2$ は5で割り切れるので

$$x=5n+2 \quad (n \text{は整数})$$

と表せる．

このとき②より

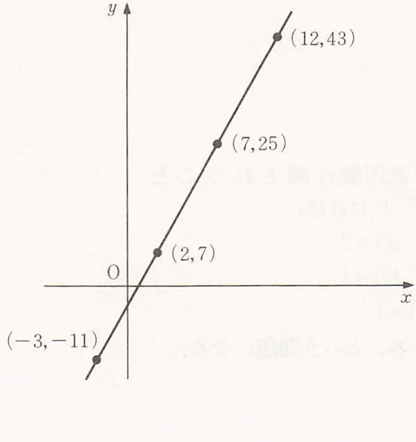
$$18\cdot 5n-5(y-7)=0$$

$$\therefore\ y=18n+7$$

となるから

$$(x,\ y)=(5n+2,\ 18n+7) \quad (n \text{は整数})$$

を得る．



［注］ 1° ①は xy 平面上で直線を表す．(2)の目的は，直線①上の格子点(整数座標をもつ点)を求めることであり，その結果，格子点が等間隔に並んでいることが分ったとも言える．

2° 少し試行錯誤すれば，①の整数解の例を見つけることができるが，系統的にそれを見出す方法や，そもそも整数解が存在するのかといった問題については，☞ C.4，C.5

B.145

13で割ると7余り，7で割ると2余る数がある．この数を 13×7 で割った余りを求めよ．

アプローチ 試行錯誤で見つけることもできるでしょうが，B.144の応用として考えましょう．どのようにして，方程式の整数解の問題に帰着させるかです．

解答 問題の数を N とし，

N を13で割った商を x，

N を7で割った商を y

とすると

$$N=13x+7=7y+2$$

$$\therefore\quad -13x+7y=5 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立つ．これは

$$(x,\ y)=(-2,\ -3)$$

を1つの解として持つ．すなわち

$$-13(-2)+7(-3)=5 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ．そこで ①−② を作ると

$$-13(x+2)+7(y+3)=0$$

が得られる．

◀ B.144で学んだ技法．

よって

$$\begin{cases} x+2=7n \\ y+3=13n \end{cases} \quad (n\text{は整数})$$

と表せる．

◀ 13と7は互いに素．

したがって

$$\begin{aligned} N&=13(7n-2)+7 \\ &=13\cdot 7n-19 \\ &=13\cdot 7(n-1)+72 \end{aligned}$$

となり，N を $13\cdot 7$ で割ると **72余る** ことが分かる．

［注］ 上の議論から分かるように，逆，すなわち

$13\cdot 7$ で割ると72余る．

$\Longrightarrow$ 13で割ると7余り，7で割ると2余る

も成立する．

B.146

次の方程式の整数解を求めよ．

(1) $2xy-3x-8y+7=0$ ……… ①

(2) $15x^2-2xy-y^2+32x-44=0$ ……… ②

アプローチ▶ (1) ☞ A1.E3 (2)も同じ原理ですが，いくらか複雑です．

解答 (1) ①を次のように変形する．

$$(x-4)(2y-3)=5 \quad \cdots\cdots\cdots ①'$$

よって，可能な場合は次表のとおり．

5を2つの整数の積に分ける．▶

$x-4$ $2y-3$	-5 -1	-1 -5	1 5	5 1
x y	-1 1	3 -1	5 4	9 2

(2) ②を次のように変形する．

☞[注] 2° ▶

$$(3x-y+4)(5x+y+4)=60 \quad \cdots\cdots\cdots ②'$$

ここで

8の倍数 ▶

$$(3x-y+4)+(5x+y+4)=8x+8$$

であるから，和が8の倍数となるような2数の積として60を表現する方法を考えて，次表を得る．

$3x-y+4$ $5x+y+4$	-30 -2	-2 -30	2 30	30 2	-10 -6	-6 -10	6 10	10 6
x y	-5 19	-5 -9	3 11	3 -17	-3 5	-3 1	1 1	1 -3

[注] 1° ①は xy 平面上で双曲線を表す．実際 y について解けば

$$y=\frac{3}{2}+\frac{5/2}{x-4} \qquad \therefore \quad (x-4)\left(y-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

となる．したがって，この双曲線上には4つの格子点が存在するといえる．また③は①′を見出す手段としても使える．

2° 実は②も双曲線を表す．また②′への変形を見出すには，②の左辺の2次の項だけを取り出し，

$$15x^2-2xy-y^2=(3x-y)(5x+y) \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

と因数分解できることを参考にして，②を

$$(3x-y+a)(5x+y+b)=c$$

という形に変形することを考えればよい．

B.147

次の方程式の整数解を求めよ．

(1)　$2x^2+3y^2=20$

(2)　$2x^2-xy+3y^2-4x-5y-6=0$

アプローチ　x または，y のとりうる値の範囲が限定できます．

解答　(1)　x は実数だから $3y^2 \leqq 20$．よって

$$y=\pm 2,\ \pm 1,\ 0.$$

このうち x が整数になるものを選んで

$$(x,\ y)=(\pm 2,\ 2),\ (\pm 2,\ -2).$$

(2)　x について整理し

$$2x^2-(y+4)x+3y^2-5y-6=0$$

解の公式で解いて

$$x=\frac{1}{4}(y+4\pm\sqrt{D})$$

ただし，

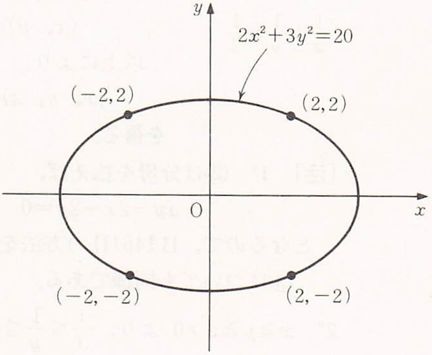
$$D=(y+4)^2-8(3y^2-5y-6)$$
$$=-23y^2+48y+64$$

ここで $D \geqq 0$ を満たす y の整数値は 0，1，2，3

だから，対応する x が整数となるものを選んで

$$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (2,\ 3),\ (3,\ 0).$$

[注]　1°　実は，(1)，(2)の方程式は xy 平面上で楕円を表す．(1)の場合下図において，x を実数とするような y の範囲が有限の幅をもつ区間に限定される様子は一目瞭然となる．



2°　B.146 (2) において x の実根条件を調べてみると，有限の区間にはならない．また逆に，B.147 (2) の方程式を B.146 ②′ のような形に変形しようとしてもうまく行かない．(B.147 (2) の方程式の 2 次の項 $2x^2-xy+3y^2$ は実数係数の範囲で B.146 ④ のように因数分解できないのである．)

このように B.146 と B.147 の方程式には解法上の大きな相違があるが，それは，xy 平面上でそれらが表す図形の相違に関係する．

B.148

次の方程式の整数解を求めよ．ただし $x \geqq y \geqq z > 0$ とする．

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

アプローチ z を大きくし過ぎると（x，y も大きくなるので），①は成立し得ません．これから "$z=2$ または3" が分かります．

解答 仮に $z \geqq 4$ とすると，x，$y \geqq 4$ だから

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{3}{4}$$

となり，①は成立し得ない．また，$z=1$ も明らかに不適．よって $z=2$ または3である．

i）$z=2$ のとき，①は

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

となる．ここで $y \geqq 5$ とすると同様の考察から②は成立し得ないので，$y=2$，3，4．このうち，x が整数となるのは $y=3$，4 のみで

（x，$y \geqq 5$ のとき $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leqq \frac{2}{5}$）

$$(x,\ y)=(6,\ 3),\ (4,\ 4)$$

となる．

ii）$z=3$ のとき，①は

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots ③$$

となる．ここで $y \geqq 4$ とすると③は成立し得ないので $y=3$．よって

（x，$y \geqq 4$ のとき $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leqq \frac{1}{2}$）

$$(x,\ y)=(3,\ 3)$$

以上により，

$$(x,\ y,\ z)=(6,\ 3,\ 2),\ (4,\ 4,\ 2),\ (3,\ 3,\ 3)$$

を得る．

［注］ 1° ②は分母を払えば，

$$xy-2x-2y=0$$

となるので，B.146(1) の方法を用いることもできる．

③についても同様である．

2° $x \geqq y \geqq z > 0$ より，$\frac{1}{x} \leqq \frac{1}{y} \leqq \frac{1}{z}$

$$\therefore\ 1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqq \frac{3}{z}$$

$\therefore$ $z \leqq 3$ とすることもできる．

B.149

6の約数1, 2, 3, 6の和は6の2倍である．このように，(正の)約数の和がもとの数の2倍に等しいとき，その数を完全数という．p, q を異なる素数として次の問に答えよ．

(1)　pq という形の完全数をすべて求めよ．

(2)　p^2q という形の完全数をすべて求めよ．

アプローチ　p, q が素数であることに注意して，約数を全部書いてみると，p, q に対する方程式が立ちます．

解答　**(1)**　pq の約数は $1, p, q, pq$ の4つだから pq が完全数であるための条件は，

$$1+p+q+pq=2pq$$

◀ B.146(1)

$$\therefore\quad (p-1)(q-1)=2$$

ここで p, $q\geqq2$ だから，可能な場合は

$$(p-1,\ q-1)=(1,\ 2)\ \text{または}\ (2,\ 1)$$

$$\therefore\quad (p,\ q)=(3,\ 2)\ \text{または}\ (2,\ 3).$$

よって，pq という形の **完全数は6** だけである．

(2)　p^2q の約数は，$1, p, q, p^2, pq, p^2q$ の6個だから，p^2q が完全数であるための条件は，

◀すべて異なる．

$$1+p+q+p^2+pq+p^2q=2p^2q$$

$$\therefore\quad (1+p+p^2)(1+q)=2p^2q.\quad\cdots\cdots\cdots\ ①$$

ここで，$1+p+p^2$ は p で割り切れないから $1+q$ は p で割り切れる．そこで①を

◀ $1+p+p^2$ を p で割ると1余る．

$$(1+p+p^2)\frac{1+q}{p}=2pq$$

と書くと，同じ理由で $\dfrac{1+q}{p}$ は p で割り切れ，さらに $\dfrac{1+q}{p^2}$ は2で割り切れる．そこで

◀ $1+p+p^2$
$=1+p(p+1)$
は奇数．

$$1+q=2p^2\cdot r\quad (r\ \text{は整数})\quad\cdots\cdots\cdots\ ②$$

とおく．すると①より

$$(1+p+p^2)r=q\quad\cdots\cdots\cdots\ ③$$

となるが，q は素数だから $r=1$ となり，②, ③より

$$1+p+p^2=q,\ 1+q=2p^2$$

を得，これを解いて $p=2$, $q=7$ を得る．よって p^2q という形の **完全数は28** だけである．

B.150

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} x+(a-1)y=2 & \cdots\cdots\ ① \\ x^2+2ay^2=5 & \cdots\cdots\ ② \end{cases}$$

が少くとも1組の整数解をもつように実数 a の値を定めよ．

(2) x の2次方程式

$$x^2+ax+a+2=0 \qquad \cdots\cdots\ ③$$

の2根が整数となるように実数 a の値を定めよ．

アプローチ (1) $(x,\ y)=(1,\ 1)$ を解にもつような a の値は？ では $(x,\ y)=(2,\ 1)$ なら？「どんな整数解なら許されるのか」という逆の発想． (2) どのような整数なら，③の2根となり得るのでしょうか．

解答 (1) 整数 x，y が与えられたとして，a を適当に選ぶことによって x，y が①，②の解となり得るための条件は，①，②を同時に満たす a が存在することである．

もしも $y=0$ とすると①と②は矛盾するので，$y\neq 0$ としてよい．このとき②から定まる a の値

$a=\dfrac{5-x^2}{2y^2}$ が①を満たす条件は

$$x^2-2yx+2y^2+4y-5=0$$

B.147(2) ▶

$$\therefore\quad x=y\pm\sqrt{5-4y-y^2}$$

である．ここで x の実数条件から $y=-5,\ -4,\ \cdots,\ 1$ となり，このうち x が整数となるのは，

$$(x,\ y)=(-5,\ -5),\ (-5,\ -2),\ (1,\ -2),\ (1,\ 1)$$

である．よって $\boldsymbol{a=-\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{2},\ 2}$ となる．

(2) 2根を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-a \qquad \cdots\cdots\ ④$$
$$\alpha\beta=a+2 \qquad \cdots\cdots\ ⑤$$

整数 α，β に対し，④，⑤を満たす a が存在する条件は④から定まる a の値が⑤を満たすことであり，

B.146(1) ▶

$$\alpha\beta+\alpha+\beta-2=0 \qquad \therefore\quad (\alpha+1)(\beta+1)=3$$

よって $(\alpha,\ \beta)=(2,\ 0),\ (0,\ 2),\ (-2,\ -4),\ (-4,\ -2)$ となり，$\boldsymbol{a=-2,\ 6}$ を得る．

B.151

(1)　3, 4, 5のような連続する3整数の積は，6の倍数であることを示せ．

(2)　自然数nに対し，$f(n)=n^4+4n^3+5n^2+2n-4$ を6で割った余りを求めよ．

アプローチ　nの多項式$f(n)$を6で割った余りを調べるには，n自身を6で割った余りに応じて

$n=6k$，$n=6k+1$，$n=6k+2$，……，$n=6k+5$　　(kは整数)

と分類するのがオーソドックスな方針ですが，……

解答　**(1)**　連続する3整数の中には，少なくとも1つ偶数がある．ゆえに，連続3整数の積は，2の倍数である．

◀ 偶数が2つ含まれることもある．

同様に，連続する3整数の中には，3の倍数がただ1つ含まれているので，それらの積は，3の倍数である．

ゆえに，連続3整数の積は，2×3，つまり6の倍数である．■

◀ 2と3は互いに素．

(2)　連続3整数n，$n+1$，$n+2$ の積が6の倍数であることに注目して，nの4次式$f(n)$を3次式 $n(n+1)(n+2)$ で割ると，

$$\begin{array}{r}
n+1 \\
n^3+3n^2+2n\,\overline{)\,n^4+4n^3+5n^2+2n-4} \\
\underline{n^4+3n^3+2n^2} \\
n^3+3n^2+2n \\
\underline{n^3+3n^2+2n} \\
-4
\end{array}$$

$f(n)=n(n+1)(n+2)(n+1)-4$

となる．

ゆえに，自然数nに対し，$f(n)$を6で割ったときの余りは，**2**　である．

［注］　1°　上の解答(1)では，整数の系列

……，-3，-2，-1，0，1，2，3，……

において，自然数dの倍数が，

……，$-2d$，$-d$，0，d，$2d$，……

のように，距離dずつへだてて存在している，という事実を，$d=2$，$d=3$ の場合について用いた．

2°　(2)で文字nの4次式$f(n)$を3次式 $n(n+1)(n+2)$ で割ったときの余りは，定数-4であるが，整数$f(n)$を6で割ったときの余りは，2となることに注意しよう．

B.152

(1) $m^2(m+1)$ を7で割ると3余るような整数mをすべて求めよ．

(2) どんな整数mに対しても，m^2+1 は7で割り切れないことを示せ．

アプローチ mを7で割った余りで分類します．

解答 (1) mを7で割った余りをrとすると，

☞ A1.E 5 I ▶

$m^2(m+1)$ を7で割った余り

$=r^2(r+1)$ を7で割った余り ……… ①

が成立する．ところで $r=0, 1, 2, \cdots, 6$ であるが，それぞれに対応して，

$$r^2(r+1)=0, 2, 12, 36, 80, 150, 252$$

となり，このうち7で割って3余るものは，80，150である．すなわち $r=4, 5$．よって，求めるmは **7で割ったとき4または5余る数すべて** である．

(2) mを7で割った余りをrとすると，

☞ A1.E 5 I ▶

m^2+1 を7で割った余り

$=r^2+1$ を7で割った余り ……… ②

が成立する．後者の値を調べるためには

こういう余りのとり方もある．▶

$r=0, \pm1, \pm2, \pm3$ としてよい．このそれぞれに対応して

$$r^2+1=1, 2, 5, 10$$

となり，どれも7で割り切れない．よってどんな整数mに対しても，m^2+1 は7で割切れない．■

参考 1° 合同式（☞A1.E 5 II, III）を使うと，①，②は

$m\equiv r\ (\text{mod.}7) \Longrightarrow m^2(m+1)\equiv r^2(r+1)\ (\text{mod.}7)$

$m\equiv r\ (\text{mod.}7) \Longrightarrow m^2+1\equiv r^2+1\ (\text{mod.}7)$

と書かれる．また(2)の議論は，簡潔に次のように記述できる．

$m^2+1\equiv 1, 2, 5, 3\ (\text{mod.}7)$

$\therefore\ m^2+1\not\equiv 0\ (\text{mod.}7)$

2° (2)と同様にして，「どんな整数mに対しても m^2+1 は3で割り切れない」ことを証明することもできる．実は，次の事実が成立する．

m^2+1 という形の数の素因数は，2または $4k+1$ (kは整数) と表せるものに限る．

B.153

自然数 x，y，z が

$$x^2+y^2=z^2$$

を満たしているとき，x，y，z のうち少くとも1つは5の倍数であることを示せ．

アプローチ x^2，y^2，z^2 を5で割った余りに注目します．

解答 一般に，整数 m に対して

m^2 を5で割った余り＝0，1，4
m^2 が5で割り切れる $\Longleftrightarrow$ m が5で割り切れる

◀ B.510 (2)

が成立する．したがって，z^2 を5で割った余りは0，1，4のどれかであるので，

x^2+y^2 を5で割った余り＝0，1，4

となる．しかるに，x^2，y^2 を5で割った余りも0，1，4のどれかであるので，可能な場合は，

$x^2\div5$ の余り	0	0	1	1	4	4	0
$y^2\div5$ の余り	0	1	0	4	1	0	4
$z^2\div5$ の余り	0	1	1	0	0	4	4

の7通りとなる．いずれにせよ，x^2，y^2，z^2 のうち少くとも1つは5で割り切れる．

よって，x，y，z のうち少くとも1つは5で割り切れる．■

［注］ 1° 合同式を使って書けば，次のようになる．

仮に x，y，$z\not\equiv0$ (mod.5) とすると，

$$x^2,\ y^2,\ z^2\equiv\pm1 \pmod{5}$$

しかしこれは

$$x^2+y^2-z^2\equiv0 \pmod{5}$$

と矛盾する．

2° 同様の方法で次の事実を示すことができる．

- x，y，z のうち少くとも1つは3の倍数である．
- x，y のうち1つは4の倍数である．

B.154

(1)　$996^4+997^4+998^4+999^4$ を5で割った余りを求めよ．

(2)　7^{10001} を48で割った余りを求めよ．

アプローチ　(1)　n^4 を5で割った余りは？　(2)　7^n を48で割った余りは？　7^2, 7^4, 7^6 を48で割ると…….

解答　(1)　n を5で割った余りを r とすると，

A1.E5 I ▶　n^4 を5で割った余り

$=r^4$ を5で割った余り

が成立する．よって，次の表

$n\div5$ の余り	0	1	2	3	4
$n^4\div5$ の余り	0	1	1	1	1

により，

$996^4+997^4+998^4+999^4$ を5で割った余り$=4$

を得る．

(2)　7^2 を48で割ると1余るから，

$1^N=1$ ▶　7^{2N} を48で割った余り$=1$,

さらに，このことから

7^{2N+1} を48で割った余り$=7$

が分かる．

よって，7^{10001} を48で割った余りは **7** となる．

［注］　合同式を使うと，次のように書ける．

(1)　$n\not\equiv0\pmod{5}$ とすると，

$$n\equiv\pm1,\ \pm2\pmod{5}$$

$$\therefore\quad n^2\equiv\pm1\pmod{5}$$

$$\therefore\quad n^4\equiv1\pmod{5}$$

よって，

$$996^4+997^4+998^4+999^4\equiv1+1+1+1\pmod{5}$$

$$=4\pmod{5}$$

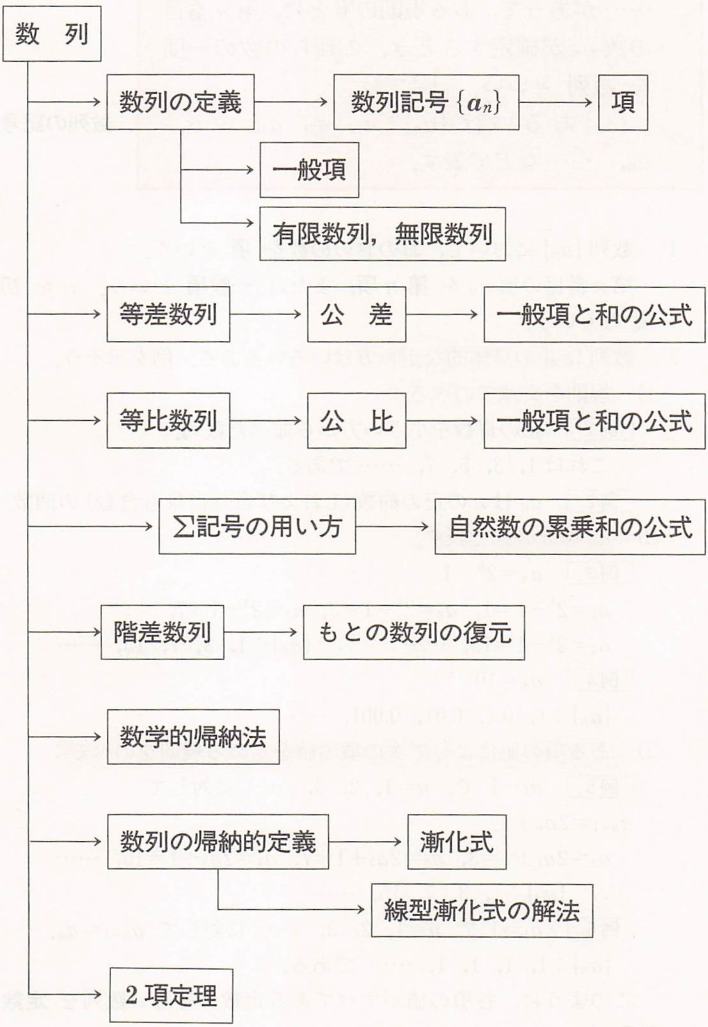
(2)　$7^2\equiv1\pmod{48}$ だから，

$$7^{2N}\equiv1\pmod{48}\quad\therefore\quad7^{2N+1}\equiv7\pmod{48}$$

よって，　$7^{10001}\equiv7\pmod{48}$ となる．

§2 数　列

□　キー・ワード　（A基礎理論篇）



A 2.1 数列の概念

数列とは何かの説明はどの教科書にもある．ここでは理解を深めるためにややていねいに述べる．

I．数列とは何か

数列の定義

[定義] 数を並べたもの a_1，a_2，a_3，……，a_n，……があって，ある規則のもとに，第 n 番目の数 a_n が確定するとき，これらの数の一団を **数列** といい，記号では

$\{a_n\}$ あるいは $\{a_n\}$：a_1，a_2，a_3，……，a_n，…… などで表す．

数列の記号

1° 数列 $\{a_n\}$ において，おのおのの数を **項** という．

第 n 番目の項 a_n を **第 n 項**，または **一般項** という．a_1 を **初項** ともいう．

2° 数列 $\{a_n\}$ の具体的な定め方はいろいろある．例を示そう．

1) 規則を文章でのべる：

例 1　正の奇数を小さい方から並べた数列．

これは 1，3，5，7，…… である．

例 2　a_n は n の正の約数（1 および自分自身も含む）の個数．

2) a_n を n の式で表す．

例 3　$a_n=2^n-1$

$a_1=2^1-1=1$，$a_2=2^2-1=3$，$a_3=2^3-1=7$，

$a_4=2^4-1=15$，……　　$\therefore$ $\{a_n\}$：1，3，7，15，……

例 4　$a_n=10^{1-n}$

$\{a_n\}$：1，0.1，0.01，0.001，……

3) ある項の値によって次の項の値を定める規則をのべる：

例 5　$a_1=1$ で，$n=1$，2，3，…… に対して $a_{n+1}=2a_n+1$．

$a_2=2a_1+1=3$，$a_3=2a_2+1=7$，$a_4=2a_3+1=15$，……

$\therefore$ $\{a_n\}$：1，3，7，15，……

例 6　$a_1=1$ で $n=1$，2，3，…… に対して $a_{n+1}=a_n$．

$\{a_n\}$：1，1，1，1，…… である．

このように，各項の値がすべてある定数に等しい数列を **定数数列** という．

[上の例における規則 $a_{n+1}=2a_n+1$, $a_{n+1}=a_n$ などを数列の **漸化(ぜんか)式** といい，数列 $\{a_n\}$ は，漸化式によって帰納的に定義されているという.]

3°　項の個数が限りなく多い数列を **無限数列** といい，項の個数が有限である数列を **有限数列** という．有限数列では，最後の項を **末項** という.

4°　上の 2° の 2) から示唆されるように，「無限数列とは，$\mathbb{N}$ (自然数全体) を定義域とする関数(写像) である.」とみなすこともできる.

II. 一般項を求めること

数列 $\{a_n\}$ を定める規則が間接的で，a_n が n のどのような式で表されるかがわからない場合には，第 n 項を求める，すなわち，a_n を表す n の式を求めることが問題になる.

1°　例1　規則が文章でのべられている場合の例：

正の奇数を小さい方から並べた数列 1，3，5，7，…… では

$$a_n=2n-1.$$

例2　漸化式で帰納的に与えられている場合の例：

$a_1=1$ かつ $a_{n+1}=2a_n+1$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ においては，$a_n=2^n-1$ であるらしいことが I の 2° の 例3, 例5 を見比べるとわかる．この推測が正しいことは，後に A 2.8 でみる.

2°　数列 $\{a_n\}$ において，a_n が n の簡単な式で表されるとは限らない.

例3　a_n は小さい方から n 番目の素数とすれば，$\{a_n\}$ は確定するが，この a_n を n の簡単な式で表すことはできない.

A 2.2　等差数列とその和

1つの数から始めて順に一定の数を加えるという手順で得られる数列を等差数列という．正確には

等差数列の定義

[定義]　a，d を定数として，

$$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+d\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定められる数列

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots\cdots$$

を **等差数列** という．

a をこの等差数列の **初項**，d を **公差** という．

公差の定義

1°　例1　初項1，公差2の等差数列は 1，3，5，7，……

例2　初項 a，公差0の等差数列は a，a，a，a，……

(定数数列)

2°　等差数列のことを算術数列ともいう．英語ではむしろこちら (arithmetic progression) が使われる．

等差数列の一般項と和

[定理]　初項 a，公差 d の等差数列では

(1)　第 n 項は

$$a_n=a+(n-1)d$$

(2)　初項から n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

1°　例　初項 $a=1$，公差 $d=1$ の等差数列 1，2，3，4，…… の

第 n 項 $a_n=1+(n-1)\cdot 1=n$

初項から n 項までの和 $S_n=\frac{1}{2}n\{2+(n-1)\}=\frac{1}{2}n(n+1)$

2°　この公式の証明は教科書にまかせる．

3°　等差数列において公差が0でないなら、その第 n 項は n の1次式である．逆に，第 n 項が n の1次式である数列は等差数列である．

ガイド　☞ B.202

A 2.3　等比数列とその和

1つの数に順に一定の数を掛けるという手順で得られる数列を等比数列という．正確には，

等比数列の定義

［定義］ a，r を定数として，

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=ra_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定められる数列

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots\cdots$$

を **等比数列** という．

a をこの等比数列の **初項**，r を **公比** という．

公比の定義

1°　例1　初項1，公比2の等比数列は，1，2，4，8，……

例2　初項1，公比 −1 の等比数列は，1，−1，1，−1，……

例3　初項 a，公比1の等比数列は，a，a，a，a，……

（定数数列）

2°　等比数列のことを幾何数列（geometric progression）ということもある．

3°　等比数列の各項が0でないとき（すなわち $a\neq0$，$r\neq0$ のとき）

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r \quad (\text{一定})$$

これが“等比”数列の名のおこりである．

等比数列の一般項と和

［定理］ 初項 a，公比 r の等比数列では

(1)　一般項は

$$a_n=ar^{n-1}$$

(2)　初項から n 項までの和 S_n は，

$$r\neq1 \text{ ならば } S_n=a\cdot\frac{1-r^n}{1-r}=a\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$$

$$r=1 \text{ ならば } S_n=na$$

1°　例1　初項が 3，公比が -2 の等比数列の第 7 項は

$$3\times(-2)^6=192.$$

例2　$a\neq1$ のとき，$a+a^2+a^3+\cdots\cdots+a^{10}=\dfrac{a-a^{11}}{1-a}$

2°　前頁［定理］の(2)の $r\neq1$ の場合の**証明**：

$$\begin{array}{rl} S_n= & a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1} \\ -)\quad rS_n= & \quad\ \ ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ \hline (1-r)S_n= & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -ar^n \end{array}$$

$1-r$　で割って　$S_n=\dfrac{a-ar^n}{1-r}=a\cdot\dfrac{1-r^n}{1-r}$

同様な技巧は，

$$1+2r+3r^2+\cdots\cdots+nr^{n-1}$$

のような等比数列の各項に等差数列を乗じた数列の和を求めるのにも利用される．　☞ B. 208

3°　複利法を用いる金融の問題は整理して考えると，(1+利率) を公比とする等比数列とその和の問題に帰着することが多い．

ガイド　☞ B. 205

A 2.4　Σ 記号（シグマ記号）

数列の和を明確に表すのに Σ 記号が用いられる．

Σ 記号の定義

［定義］　n を自然数とするとき，

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$

1°　Σ（シグマ）は，英字 S に相当するギリシア文字で，和を意味する sum（英）の頭文字からきている．

2°　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ の上下の小文字は，k が 1 から n までの値をとることを示している．専門書では $\displaystyle\sum_{1\leqq k\leqq n}$ のような記法も用いる．

例1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

例2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(k^2-3k)=(1^2-3\cdot1)+(2^2-3\cdot2)$

$+(3^2-3\cdot3)+(4^2-3\cdot4)$

3° Σ の下端が“$k=1$”でない場合もある。

例3 $\displaystyle\sum_{k=3}^{6} a_k = a_3+a_4+a_5+a_6$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} a_k = a_0+a_1+a_2$

4° Σ の上端と下端の値が等しいこともある。

例4 $\displaystyle\sum_{k=2}^{2} a_k = a_2$

5° $m<n$ に対して $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} a_k$ は，普通考えない。

6° $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ の値は，添字(suffix)の文字 k に無関係である。

例5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2=\sum_{i=1}^{3} i^2=\sum_{l=1}^{3} l^2=1^2+2^2+3^2$

Σ 記号の計算規則

[定理] (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (c は定数)

特に，$a_k=1$ と考えると

(2)′ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc$

1° (1)，(2)より，

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)=\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k+\beta\sum_{k=1}^{n}b_k$ (α，β は定数)

となる。

2° $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$ は，一般には成立しない。

3° 上の規則(2)′は誤りやすいので注意のこと。

例 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2=\underbrace{2+2+\cdots\cdots+2}_{n\text{個}}=2n$, $\displaystyle\sum_{i=2}^{4}3=3+3+3=9$,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{3}1=1+1+1+1=4$

A 2.5 自然数の累乗の和

$\sum k^r$ の公式

[公式]

(1)　$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　$\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3)　$\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{n} k\right\}^2$$

1°　証明については教科書，あるいは，B.211，B.219 により理解してほしい．余力のある者は，☞ C.8

2°　$a_k=(k$ の 3 次以下の整式) の和は，$\sum$ の線型性により上の公式を利用して求めることができる．

例 1　$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{n} k^2+2\sum_{k=1}^{n} k$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

例 2　$15^2+16^2+17^2+\cdots\cdots+30^2+31^2=\sum_{k=15}^{31} k^2=\sum_{k=1}^{31} k^2-\sum_{k=1}^{14} k^2$

$$=\frac{1}{6}\cdot 31\cdot 32\cdot 63-\frac{1}{6}\cdot 14\cdot 15\cdot 29$$

$$=10416-1015=9401$$

A 2.6 階差数列

階差数列の定義

[定義]　数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$b_n=a_{n+1}-a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で定まる数列 $\{b_n\}$ を $\{a_n\}$ の **階差数列** という．

1°　例 1　$\{a_n\}$：1，4，9，16，25，…… の階差数列は

$\{b_n\}$：4−1，9−4，16−9，25−16，……

すなわち，3，5，7，9，……

例 2　$\{a_n\}=\{n^2\}$：1，4，9，16，25，…… の階差数列は

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

より　$\{b_n\}=\{a_{n+1}-a_n\}=\{2n+1\}$：3，5，7，9，……

2°　数列 $\{a_n\}$ が与えられると，初項から第 n 項までの和を考えることにより，すなわち，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とおくことにより，新しい数列 $\{S_n\}$ を作ることができる．

逆に，数列 $\{S_n\}$ が与えられると，

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1} \quad \therefore \quad a_{n+1}=S_{n+1}-S_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

であるから，$\{S_n\}$ の階差数列として a_2，a_3，a_4，…… が定まる．

ただし，a_1 については，$S_1=a_1$ として求められる．

いいかえると，

［公式］　数列 $\{a_n\}$ の n 項までの和を S_n とすると，

$$a_n=\begin{cases} S_n-S_{n-1} & (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ S_1 & (n=1) \end{cases}$$

数列の和と一般項との関係

例 3　$S_n=2^n$ なら　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1},\quad a_1=S_1=2$$

$\therefore$　$\{a_n\}$：2，2，4，8，16，……

注意　この $\{a_n\}$ は第 2 項以後は公比 2 の等比数列であるが，全体としてはそうでない．

［定理］　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

階差数列を用いてもとの数列を復元

1°　**証明**：$b_k=a_{k+1}-a_k$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} b_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) \\ &=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n-1}) \\ &=-a_1+(a_2-a_2)+(a_3-a_3)+\cdots\cdots+(a_{n-1}-a_{n-1})+a_n \\ &=a_n-a_1\end{aligned}$$

$\therefore$　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ ■

2° 例4 $a_1=0$，$a_2=2$，$a_3=6$，$a_4=14$，$a_5=30$，……，
一般に $a_{n+1}=a_n+2^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ であれば，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=0+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-2 \quad (n=2, 3, 4, \cdots\cdots)$$

上式で $n=1$ とおいても成立するから，

$$a_n=2^n-2 \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

数列和を求める原理

[定理] 数列 $\{a_n\}$ に対し，これを階差数列にもつ数列 $\{c_n\}$ が見つかれば，すなわち，a_n が適当な数列 $\{c_n\}$ を用いて $a_n=c_{n+1}-c_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ と表すことができれば，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=c_{n+1}-c_1 \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

1° 証明は上と同様である．

2° 与えられた $\{a_n\}$ に対し，このような $\{c_n\}$ を見つける一般的方法はない．しかしこのような $\{c_n\}$ が1つ見つかりさえすれば，$\sum_{k=1}^{n}a_k$ が求められるのである．具体例についてはB篇で扱う．

ガイド☆ ☞ B. 210，B. 211

A 2.7 数学的帰納法

たとえば，

P_n：1から n までの自然数の和は $\frac{1}{2}n(n+1)$ である．

のように，自然数 n に関する条件 P_n について，これが n のすべての自然数値に対して成立することを証明するには，

数学的帰納法の手順

(I) P_1 が成り立つ．
(II) P_m が成り立つならば，P_{m+1} も成り立つ． $(m=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

という2つの主張が正しいことを証明すればよい．

(Ⅰ)，(Ⅱ)を証明して，n の任意の自然数値に対して条件 P_n が成立することを証明する方法を **数学的帰納法** という．

1°　たとえば，

“2以上のすべての n の自然数値に対し条件 P_n が正しい”

ことを示すには，(Ⅰ)の代りに

(Ⅰ)′　P_2 が成り立つ

を証明すればよい．

また，“$n \geqq 3$ に対し P_n”を示したいのなら，まず“P_3 が成り立つ”ことを示せばよい．以下，同様である．

2°　(Ⅱ)の代りに，

(Ⅱ)′　$n \leqq m$ を満たすすべての n に対し P_n が成り立つならば，　　　　P_{m+1} も成立

を用いる証明法もある．

もちろん，(Ⅰ)も証明できなければいけない．

ガイド　応用例は ☞ B.219 など

3°　具体例をかかげよう．

[例題1]　n が自然数のとき，次式の成立を数学的帰納法により示せ．

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots\cdots\cdots ☆$$

解　(Ⅰ)　$n=1$ のときは，左辺=1，右辺$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$ となるから，☆は成り立つ．

(Ⅱ)　$n=m$ のとき成立すると仮定，すなわち

$$1+2+3+\cdots\cdots+m=\frac{1}{2}m(m+1) \quad \cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

であると仮定する．Ⓐの両辺に $(m+1)$ を加えると，

$$1+2+3+\cdots\cdots+m+(m+1)=\frac{1}{2}m(m+1)+(m+1)$$

$$=\frac{1}{2}(m+1)\{(m+1)+1\} \quad \cdots\cdots\cdots Ⓑ$$

Ⓑは $n=m+1$ のときも☆が成立することを示している．■

[例題2]　n が2以上の自然数ならば，任意の正数 h に対して，

$$(1+h)^n>1+nh \quad \cdots\cdots\cdots P_n$$

であることを数学的帰納法により示せ．　**(ベルヌイの不等式)**

解　（Ⅰ）　$n=2$ のとき，$h^2>0$ であるから

$$(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h \quad \cdots\cdots\cdots P_2$$

は成立する．

（Ⅱ）　P_m が成立すると仮定，すなわち

$$(1+h)^m>1+mh \quad \cdots\cdots\cdots P_m$$

が正しいと仮定する．P_m の両辺に $1+h>0$ をかけると，

$$(1+h)^{m+1}>(1+mh)(1+h)=1+(m+1)h+mh^2$$

$mh^2>0$ であるから，これより

$$(1+h)^{m+1}>1+(m+1)h \quad \cdots\cdots\cdots P_{m+1}$$

が成り立つ．■

A 2.8　数列の帰納的定義・漸化式

Ⅰ．漸化式の概念

まず，いくつかの例について説明しよう．

例1　数列 $\{a_n\}$ の連続する2項 a_n，a_{n+1} の間に

$$a_{n+1}=2a_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

という関係が成り立つものとしよう．いま，

（Ⅰ）　a_1 の値が定められた

とする．そうするとⒶは

（Ⅱ）　a_n の値が定まれば，a_{n+1} の値が定まる

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

ことを意味しているので，数学的帰納法によって，すべての n の自然数値に対して，a_n の値が定まることになる．

たとえば，$a_1=1$ の場合には，

$$a_2=2a_1+1=3$$
$$a_3=2a_2+1=2\cdot3+1=7$$
$$a_4=2a_3+1=2\cdot7+1=15$$

という具合に項の値が定まっていく．そうして，後に述べる方法を用いると

$$a_n=2^n-1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となることが厳密に証明される．

例2　数列 $\{a_n\}$ において，連続する3項 a_n，a_{n+1}，a_{n+2} の間に

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots Ⓑ$$

が成り立つ場合を考えてみよう．こんどは，a_1 の値のみを決めても $\{a_n\}$ は定まらない．

はじめの2項 a_1，a_2 の値をともに決めれば，Ⓑから $\{a_n\}$ が確定する．

たとえば，$a_1=1$，$a_2=1$ とすれば，

$a_3=a_2+a_1=2$，$a_4=a_3+a_2=3$，$a_5=a_4+a_3=5$，……

のようにして，

$$\{a_n\}:1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots\cdots$$

と定まる．この数列は **フィボナッチの数列** として有名なものである．実は，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

ガイド　☞ B. 228

例3　等差数列，等比数列も

“a_n の値から a_{n+1} の値を定める規則”

$$a_{n+1}=a_n+d,\quad a_{n+1}=a_n\times r$$

で定められる．

漸化式の定義

> **[定義]**　数列 $\{a_n\}$ のいくつかの連続する項の値から，それらの次の項を与える関係式
>
> $$a_{n+1}=f(a_n),$$
> $$a_{n+2}=g(a_{n+1},\ a_n)$$
>
> などを，数列 $\{a_n\}$ の **漸化式** という．
>
> 与えられた漸化式を満たすことを要求し，さらに，はじめのいくつかの項を指定すると $\{a_n\}$ は決定する．
>
> このような数列の定め方を，漸化式による(帰納的)定義という．

1°　漸化式によって定義されている数列の一般項を求めることは一般に容易ではない．本節のII以下で，基本的な漸化式についてだけ処理の仕方を学ぶ．

II．定数係数線型２項間漸化式（$a_{n+1}=pa_n+q$ 型）

p，q を n によらない定数として，漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots\text{Ⓐ}$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ を考察する．

$p=1$ の場合Ⓐは，$\{a_n\}$ が公差 q の等差数列であることを意味するので，すでにつきあいずみである．

そこで，以下 $p\neq1$ の場合を考える．

さて，定数数列 $\{\alpha\}$ がⒶを満たすとすれば

$$\alpha=p\alpha+q \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

である．このとき，

$$\alpha=\frac{q}{1-p}$$

さて，Ⓐと①を辺々引算すると

$$a_{n+1}-\alpha=pa_n+q-p\alpha-q$$
$$=p(a_n-\alpha)$$

すなわち，漸化式Ⓐが

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha) \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots\text{②}$$

と書きなおされる．②は数列 $\{a_n-\alpha\}$ が公比 p の等比数列であることを示している．

したがって，

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)p^{n-1}$$

ゆえに，$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$

$$=\left(a_1-\frac{q}{1-p}\right)p^{n-1}+\frac{q}{1-p} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

これが求める結果である．

［まとめ］

$$a_1=a,\ a_{n+1}=pa_n+q \ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$
$$(p,\ q \text{ は } n \text{ によらぬ定数で，} p\neq1)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ については，定数 α を $\alpha=p\alpha+q$ の解として定めると，漸化式が

$$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$$

の形に変形される．したがって，

$\{a_n-\alpha\}$ が公比 p の等比数列となる

ことを利用して a_n が求められる．

$a_{n+1}=pa_n+q$ 型の数列の一般項を求める手順

1°　例　$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を上の方法で求める．

$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+1$ を解けば $\alpha=2$．

漸化式を書きなおすと

$$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\qquad\cdots\cdots\cdots☆$$

となる．したがって，$\{a_n-2\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である．

$$\therefore\quad a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2^{n-1}}\quad\therefore\quad a_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

2°　この解法は，次節IIIで学ぶ〔解法２〕の特別の場合である．

III#．より一般の線型２項間漸化式（$a_{n+1}=pa_n+q(n)$ 型）

今度は，漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ において p は定数だが q が n に依って変わる場合を考える．q が n の関数だから，以後 $q(n)$ と表す．

$$a_{n+1}=pa_n+q(n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\qquad\cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

まず $p=1$ のとき，Ⓐは，$\{a_n\}$ の階差数列が $\{q(n)\}$ であることを意味しているから，すでにやったように

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}q(k)\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

によって a_n が求められる．また，$p=0$ のときは，計算するまでもなく，

$$a_n=q(n-1)\quad(n\geqq2)\qquad である．$$

そこで，以下 $p\neq0,\ 1$ の場合を考える．解法はいくつかあるが，ここでは基本的なものを２つあげよう．

〔解法１〕　$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}$ に着目する．Ⓐを用いると

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{q(n)}{p^{n+1}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\qquad\cdots\cdots\cdots Ⓑ$$

が得られる．このⒷは，

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{p^n}\right\}$ の階差数列が $\left\{\dfrac{q(n)}{p^{n+1}}\right\}$ である

ことを示している．

したがって

$$\frac{a_n}{p^n}=\frac{a_1}{p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{q(k)}{p^{k+1}}$$

$$\therefore\quad a_n=a_1p^{n-1}+p^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{q(k)}{p^{k+1}}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)\ \cdots\cdots\cdots \text{Ⓒ}$$

これで一応の答が得られたが，さらに a_n を n のまとまった式で表すためには，Ⓒの右辺にある

$$p^n\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\frac{q(k)}{p^{k+1}}=\sum_{k=1}^{n-1}q(k)p^{n-k-1}$$

の和を計算する工夫がいることがある．

ガイド☆　☞ B. 225 (1)

1°　ⒶからⒷを導く手順は「両辺を p^{n+1} で割る」と考えればよい．

〔解法 2〕　初項 a_1 の条件を無視して与えられた漸化式Ⓐを満たす $\{a_n\}$ の具体例（漸化式の **特殊解** ）を１つ見つけることができたとする．

それを $\{\alpha_n\}$ とおくと

$$\alpha_{n+1}=p\alpha_n+q(n)\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\ \cdots\cdots \text{Ⓐ}'$$

であるから，Ⓐ－Ⓐ′ より

$$a_{n+1}-\alpha_{n+1}=p(a_n-\alpha_n)\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\ \cdots\cdots \text{Ⓓ}$$

が得られる．このⒹは

数列 $\{a_n-\alpha_n\}$ が，公比 p の等比数列をなす

ことを示している．よって

$$a_n-\alpha_n=p^{n-1}(a_1-\alpha_1)$$

$$\therefore\qquad a_n=\alpha_n+p^{n-1}(a_1-\alpha_1)$$

ガイド☆　応用例は ☞ B. 225 (2)

1°　一般に $q(n)$ が n の多項式（r 次）のときは，特殊解 α_n も，n の r 次の多項式で求められる．特に $q(n)$ が定数のときは定数の特殊解がある．前節IIで述べた $a_{n+1}=pa_n+q$ の解法はこの場合にほかならない．

Ⅳ．連立線型漸化式(定数係数)

2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ についての連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=pa_n+qb_n & \cdots\cdots ① \\ b_{n+1}=ra_n+sb_n & \cdots\cdots ② \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

の解法については ☞ B.226 [注], B.516

Ⅴ．線型3項間漸化式(定数係数)

数列 $\{a_n\}$ について

$$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n \quad \cdots\cdots Ⓐ \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

という漸化式を考える．ここで p, q は n によらない定数とする．

天下り的だが，2次方程式

$$t^2=pt+q$$

の2つの解を α, β とすると，解と係数の関係から

$$\begin{cases} p=\alpha+\beta \\ q=-\alpha\beta \end{cases}$$

◀特に $p+q=1$ のときは，$\alpha=1$ または $\beta=1$

だからⒶは

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$$

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \cdots\cdots Ⓑ \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と書きなおすことができる．そしてⒷは，

数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列をなす

ことを意味するから

$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1) \quad \cdots\cdots Ⓒ \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となる．

Ⓒは，Ⅲで述べたタイプの漸化式であるから，Ⅲに従って解くことができるが，特に $\alpha \neq \beta$ のときには，Ⓒで α と β を入れかえた

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1) \quad \cdots\cdots Ⓒ'$$

とⒸを連立して a_n を求める方が簡単である．a_n は最終的には

$$a_n=K_1\alpha^n+K_2\beta^n \quad (K_1,\ K_2：定数)$$

という形になる．

ガイド　応用例は ☞ B.227, B.228

A2.9　2項定理

I．パスカルの3角形

$(a+b)^2$，$(a+b)^3$ の展開の公式はすでに学んだ．

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad \cdots\cdots ②$$

これらより，$a=1$，$b=x$ とおくことにより

$$(1+x)^2=1+2x+x^2 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3 \qquad \cdots\cdots ④$$

である．逆に，③，④が先にわかっているとすると，$x=\dfrac{b}{a}$ をそれぞれに代入してから a^2，a^3 を両辺に掛けると①，②が復元される．

同じように，n を一般の自然数として $(a+b)^n$ を展開する公式を見出す（展開したときの係数を定める）ためには $(1+x)^n$ を展開したときの x の各次数の項の係数を見出せばよい．

その手はじめに，$(1+x)^4$ の展開を④をもとにして調べるには，④の両辺に $1+x$ を掛ければよい．そうして得られる係数と④の係数との関係を（この目的のためには大ゲサすぎるが）一般論への見通しが得られるように考察しよう．そのために

$$(1+x)^3=\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1x+\mathrm{A}_2x^2+\mathrm{A}_3x^3 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$$(1+x)^4=\mathrm{B}_0+\mathrm{B}_1x+\mathrm{B}_2x^2+\mathrm{B}_3x^3+\mathrm{B}_4x^4 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

とおく（$\mathrm{A}_0=1$，$\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2=3$，$\mathrm{A}_3=1$ はすでにわかっているのだが）．

⑤の両辺に $1+x$ を掛けると

$$\begin{aligned}(1+x)^4&=(1+x)(\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1x+\mathrm{A}_2x^2+\mathrm{A}_3x^3)\\&=\mathrm{A}_0+(\mathrm{A}_0x+\mathrm{A}_1x)+(\mathrm{A}_1x^2+\mathrm{A}_2x^2)\\&\qquad+(\mathrm{A}_2x^3+\mathrm{A}_3x^3)+\mathrm{A}_3x^4\\&=\mathrm{A}_0+(\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1)x+(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)x^2+(\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_3)x^3+\mathrm{A}_3x^4\end{aligned}$$

これと⑥とを比較することにより

$$\mathrm{B}_0=\mathrm{A}_0=1,$$

$$\mathrm{B}_1=\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1=1+3=4$$

$$\mathrm{B}_2=\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2=3+3=6$$

$$\mathrm{B}_3=\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_3=3+1=4$$

$$\mathrm{B}_4=\mathrm{A}_3=1$$

がわかる．この(A_k)から(B_k)への構成の仕方を端的に示せば

$$
\begin{array}{lccccccccc}
(A_k); & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \text{(隣りどうしの足し算)} \\
(B_k); & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

と表記される．一般の場合，つまり $(1+x)^n$ のnを1つだけ増せば係数がどのように変わるかも，上の調子でやればよい．$n=2$ から $n=3$ の部分についても

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

であることが確認される．したがって，$(a+b)^1=a+b$ から出発して，順次に $(a+b)^n$ の係数を構成していくと，次のような図式が得られる．この図形を **パスカルの3角形** という．

$$
\begin{array}{ll}
n=1 & \qquad\qquad\quad 1 \quad 1 \\
n=2 & \qquad\qquad 1 \quad 2 \quad 1 \\
n=3 & \qquad\quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n=4 & \qquad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n=5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

II．2項係数

$(1+x)^n$ の展開の係数を**2項係数**といい，その中の x^k の係数を $\dbinom{n}{k}$ で表す(妙な記号であるが歴史的にそうなっている)．すなわち

$$
(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots\cdots+\binom{n}{k}x^k+\cdots\cdots+\binom{n}{n}x^n
$$

$$
=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k, \qquad \cdots\cdots ①
$$

である．したがって

$$
(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots\cdots
$$

$$
\cdots\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots\cdots+\binom{n}{n}b^n \qquad \cdots\cdots ②
$$

でもある．

パスカルの三角形によれば，一般に

$$\binom{n}{0}=1,\ \binom{n}{n}=1,\ \binom{n}{1}=n,\ \binom{n}{n-1}=n$$

であること，また，たとえば

$$\binom{3}{2}=3,\ \binom{4}{2}=6,\ \binom{5}{3}=10$$

であることがわかる．

III．2項定理

高校の数学で記号$\binom{n}{k}$が出てこないのは次の定理1が成り立つからである．

［定理1］　2項係数$\binom{n}{k}$は，実はn個のものからk個を取り出す組合せの数${}_n\mathrm{C}_k$に等しい．すなわち

$$\binom{n}{k}={}_n\mathrm{C}_k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},\quad \left(\begin{array}{l} n\text{は自然数} \\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n \end{array}\right)$$

1°　この定理の証明は，各教科書に工夫した説明がなされている．それによって了解してほしい．

2°　上の定理の趣旨で${}_n\mathrm{C}_k$のことをも **2項係数** と呼ぶことがある．

IIの①，②に上の定理を用いると，次の **2項定理** が得られる．

［定理2］（**2項定理**）nを自然数とするとき，次の展開公式が成り立つ

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,a^{n-k}\,b^k$$

$$=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n \quad\cdots\cdots ③$$

1°　とくに

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$$
$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k+\cdots\cdots+x^n \quad \cdots\cdots④$$

2°#　実は，nが自然数でなくても(その場合は，kの範囲は，$k=0$, 1, 2, ……，であるとして)

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!} \quad \cdots\cdots\cdots⑤$$

と定義される．そうすると(数学Aの範囲をはるかに超えるが，後日，思いあたってほしい)，nが自然数でなくても(たとえば $n=-1$，や $n=\frac{1}{2}$ であっても)

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k \quad \cdots\cdots\cdots⑥$$

が成り立つのである．ただし，xの範囲は $-1<x<1$ と制限される．たとえば

$$\binom{-1}{k}=\frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdots\cdots(-1-k+1)}{k!}$$
$$=\frac{(-1)^k k!}{k!}=(-1)^k$$

であるから

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots,\ (|x|<1)$$

が成り立つというのである．

――A2　おわり――



B. 201

(1) 第 2 項が 10，第 5 項が 43 の等差数列 $\{a_n\}$ がある．

i) 第 11 項は何か．

ii) 第 11 項から第 20 項までの和を求めよ．

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ において，はじめの 10 項の和が 10，はじめの 20 項の和が 120 であるという．はじめの 30 項の和を求めよ．

アプローチ 等差数列は，初項と公差で決まります．まずそれらの値を求めましょう．

解答 (1) 公差を d とおくと，与えられた条件から

$a_n=a_1+(n-1)d$ ▶

$$\begin{cases} a_1+d=10 \\ a_1+4d=43 \end{cases}$$

が成り立つ．

この連立方程式を解くと，$a_1=-1$，$d=11$ となる．

i) 第 11 項は $a_1+10d=(-1)+110=\mathbf{109}$

ii) 初項 109，公差 11 の等差数列の第 10 項までの和にほかならないので，

$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a_1+(n-1)d\}$ ▶

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\{2\cdot 109+(10-1)\cdot 11\}=\mathbf{1585}$$

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とおくと，与えられた条件から，

初項と公差をまず決定しようとしている． ▶

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot(2a_1+9d)=10 & \therefore\quad 2a_1+9d=2 \quad\cdots\text{①} \\ \dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot(2a_1+19d)=120 & \therefore\quad 2a_1+19d=12 \quad\cdots\text{②} \end{cases}$$

が成り立つ．①，②から a_1，d を求めると，

$$a_1=-\frac{7}{2},\quad d=1$$

よって，はじめの 30 項の和は，

$$\frac{1}{2}\cdot 30\cdot(2a_1+29d)=\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 22=\mathbf{330}$$

B. 202

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nが

$$S_n=3n^2-300n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

で与えられるとき，

(1) $\{a_n\}$は等差数列であることを示し，初項と公差を求めよ．

(2) $T=|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_{100}|$ を求めよ．

アプローチ $n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}$ ですが，$a_1=S_1$ となります．

解答 (1) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(3n^2-300n)\\&\quad-\{3(n-1)^2-300(n-1)\}\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n=6n-303 \qquad \cdots\cdots\ ①$$

また

$$a_1=S_1=-297$$

これは①に含まれる．

したがって$\{a_n\}$は**初項 -297，公差 6** の等差数列である．■

(2) ①より

$1\leqq n\leqq 50$ のとき $a_n<0$

$51\leqq n\leqq 100$ のとき $a_n>0$

であるから，

$$\begin{aligned}T=&(-a_1-a_2-\cdots\cdots-a_{50})\\&+(a_{51}+a_{52}+\cdots\cdots+a_{100}) \qquad \cdots\cdots\ ②\end{aligned}$$

また

$$a_1=-297,\ a_{50}=-3,\ a_{51}=3,\ a_{100}=297$$

であるから，②の第1のかっこの中と第2のかっこの中は等しく

$$\begin{aligned}3+9+15+\cdots\cdots+297&=\frac{1}{2}(297+3)\cdot 50\\&=7500\end{aligned}$$

となる．よって

$$T=2\cdot 7500=\mathbf{15000}$$

B.203

1000以下の正の整数のうちで

(1)　3で割り切れる数の和

(2)　6で割り切れる数の和

(3)　6とたがいに素な数の和

のそれぞれを求めよ．

アプローチ　一般に，正整数 r の倍数を小さい方から順に並べると，公差 r の等差数列となります．

解答　**(1)**　1000以下の正の整数のうち3で割り切れる数を小さい順にならべると

初項＝3，末項＝999，公差＝3

の等差数列となる．その項数は333で，和は

$$333\times(3+999)\div 2=\mathbf{166833}$$

項数は $\dfrac{999-3}{3}+1$

(2)　1000以下の正の整数のうち6で割り切れるものは，初項6，末項996，公差6の等差数列をなす．その項数は166だから，和は，

$$166\times(6+996)\div 2=\mathbf{83166}$$

(3)　1000以下の正の整数のうち r で割り切れるものの和を S_r と書くことにする．

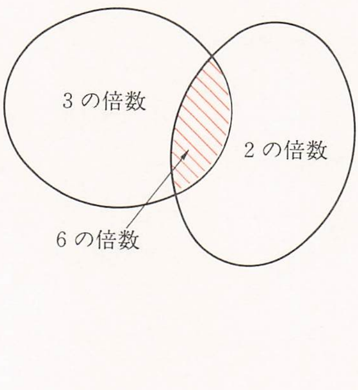
この記号を用いると，たとえば(1)の結果は $S_3=166833$ と書ける．

6とたがいに素である，とは，6の素因数2, 3のいずれでも割り切れない，ということである．1000以下で6とたがいに素ではない，すなわち，2または3で割り切れるものの和を求める．

S_3+S_2 を作ると，3，2のいずれでも割り切れる数，すなわち，6の倍数が2重に足されることになる．これを差し引いた残り，

$$S_3+S_2-S_6$$

が6と互いに素でない数の和となる．



2の倍数は，初項2，末項1000，公差2の等差数列で，項数は500だから

$$S_2=500\times(2+1000)\div 2=250500$$

∴　求める和＝(1000以下の正の整数の和)

$-(S_3+S_2-S_6)$

$=500500-334167$

$=\mathbf{166333}$

B.204

第3項が32，第9項が2048の等比数列 $\{a_n\}$ において

(1) 第11項を求めよ．

(2) 初項から第11項までの和を求めよ．

(3) 初項から第11項まで，奇数番目の項の和を求めよ．

ただし，公比は実数であるとする．

アプローチ 等比数列は，初項と公比で決定されるので，まずそれらの値を求めようと考えます．

解答 初項を a，公比を r とすると，与えられた条件から

$$\begin{cases} ar^2=32 & \cdots\cdots ① \\ ar^8=2048 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

◀ $a_n=a_1r^{n-1}$

が成り立つ．②÷① より

$$r^6=64$$

$$\therefore\ r^3=\pm 8$$

r が実数でなければならないことから，

$$r=\pm 2$$

$$\therefore\ r^2=4$$

よって，①より

$$a=8$$

(1) 第11項 $=ar^{10}=a\cdot(r^2)^5=8\cdot 4^5=\mathbf{8192}$

(2) 求める和 $S_{11}=\dfrac{a(1-r^{11})}{1-r}=8\cdot\dfrac{r^{11}-1}{r-1}$

◀ $S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

であるから，

i) $r=2$ のとき

$$S_{11}=8\cdot(2^{11}-1)=8\cdot 2047=\mathbf{16376}$$

ii) $r=-2$ のとき

$$S_{11}=8\cdot\frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)}=8\cdot\frac{2049}{3}=\mathbf{5464}$$

(3) 奇数番目の項を並べたものは，初項 $a_1=8$，公比が $r^2=4$ の等比数列であり，元の数列の第11項 a_{11} は，この数列の第6項であるから，

$$求める和=\frac{8\cdot\{(r^2)^6-1\}}{r^2-1}=\frac{8\cdot(4^6-1)}{4-1}=8\cdot\frac{4095}{3}$$

$$=\mathbf{10920}$$

B.205

毎年末に a 円ずつの年金を n 年間受け取るかわりに，第1年の初めにおいて一時に受け取るものとすれば，いくら貰えばよいか．ただし年利率 r，1年ごとの複利として計算せよ．

アプローチ 年利率 r の複利法とは，

「ある時点の Y 円は，それから満 k 年後の $Y(1+r)^k$ 円と同価値」

「ある時点の Y 円は，それより満 k 年前の $Y(1+r)^{-k}$ 円と同価値」

と見なすことを意味します．

解答 満1年後に貰う a 円は，

いま貰う $a(1+r)^{-1}$ 円と同価値

満2年後に貰う a 円は，

いま貰う $a(1+r)^{-2}$ 円と同価値

……………

……………

満 n 年後に貰う a 円は，

いま貰う $a(1+r)^{-n}$ 円と同価値

となるから，いま（第1年目の初めに）受け取るべき金額は

$$A=a(1+r)^{-1}+a(1+r)^{-2}+\cdots\cdots+a(1+r)^{-n}$$

で与えられる．

これは，初項 $a(1+r)^{-1}$，公比 $(1+r)^{-1}$ の等比数列の n 項の和であるから，

$$A=a(1+r)^{-1}\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-1}}$$

$$=a\cdot\frac{1-(1+r)^{-n}}{(1+r)-1}$$

$$=\frac{a}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}$$

［注］ 1° 上記の A のことを年金の現価という．

2° すべての金額を n 年後における価値に換算して考えると，

$$A(1+r)^n=a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\cdots\cdots+a$$

という関係が得られる．この式からも上の答が得られる．

B.206

与えられた自然数 $A=2^l\cdot3^m\cdot5^n$ (l, m, n は0以上の整数)のすべての正の約数の総和を求めよ.

アプローチ $A=2^l\cdot3^m\cdot5^n$ の約数を素因数分解するとどうなるでしょう.

解答

$$\begin{cases} 2^l \text{ の正の約数は, } 2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ \cdots\cdots,\ 2^l & \cdots\cdots ① \\ 3^m \text{ の正の約数は, } 3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ \cdots\cdots,\ 3^m & \cdots\cdots ② \\ 5^n \text{ の正の約数は, } 5^0,\ 5^1,\ 5^2,\ \cdots\cdots,\ 5^n & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

であるから, $2^l\cdot3^m\cdot5^n$ の正の約数は, ①, ②, ③の中からそれぞれ1つずつ選んで作った積

$$2^p\cdot3^q\cdot5^r\begin{pmatrix} p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ l \\ q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m \\ r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \end{pmatrix}$$

という形に表せる.

ところで, これらの項は

$$A=(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^l)\times(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^m)\times(1+5+5^2+\cdots\cdots+5^n)$$

を展開したときに, すべて1回ずつ現れる.

◀この議論の転換は, 一度経験しておかないと, 独力では気づきづらい.

したがって求める和は,

$$A=\frac{2^{l+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{m+1}-1}{3-1}\cdot\frac{5^{n+1}-1}{5-1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{8}(2^{l+1}-1)(3^{m+1}-1)(5^{n+1}-1)}$$

[注] 一般に $N=p^lq^mr^n$ (p, q, r は異なる正の素数; l, m, n は0以上の整数)の正の約数の総数と総和は

$$\text{総数}=(l+1)(m+1)(n+1)$$

$$\text{総和}=\frac{p^{l+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{m+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

となる.

B.207

動点Pが座標平面上を，原点Oからx軸に沿ってA_1まで進み，次に左に直角に曲ってA_2まで進み，さらに左に直角に曲ってA_3まで進み，……と動いていく．ただし，

$$OA_1=1,$$
$$A_{n-1}A_n=r^{n-1}\qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

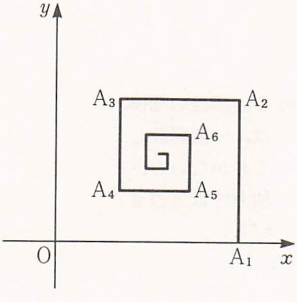
とする．ここで，r は $0<r<1$ の定数である．

A_nの座標を$(x_n,\ y_n)$とおくとき，

(1) x_{2k-1}を求めよ．

(2) x_nを求めよ．

アプローチ $x_1=x_2$，$x_3=x_4$，$x_5=x_6$，……に注意しましょう．また，x_3はx_1よりr^2小さく，x_5はx_3よりr^4大きく，x_7はx_5よりr^6小さく，……となっています．



解答 (1)

$$x_{2k-1}=x_1-r^2+r^4-\cdots\cdots+(-1)^{k-1}r^{2k-2}$$
$$=1-r^2+r^4-\cdots\cdots+(-r^2)^{k-1}$$
$$=\frac{1-(-r^2)^k}{1+r^2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1-(-1)^k r^{2k}}{1+r^2}}$$

(2) nが奇数のとき，$n=2k-1$ とおくと

$$x_n=x_{2k-1}=\frac{1-(-r^2)^k}{1+r^2}=\frac{1-(-r^2)^{\frac{n+1}{2}}}{1+r^2}$$

nが偶数のとき，$n=2k$ とおくと，

$$x_n=x_{2k}=x_{2k-1}=\frac{1-(-r^2)^k}{1+r^2}=\frac{1-(-r^2)^{\frac{n}{2}}}{1+r^2}$$

以上により

$$x_n=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{1-(-r^2)^{\frac{n+1}{2}}}{1+r^2}} & (n\text{が奇数のとき})\\ \boldsymbol{\dfrac{1-(-r^2)^{\frac{n}{2}}}{1+r^2}} & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}$$

B. 208

$S=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}$ とする．
$x\neq 1$ のとき，S を求めよ．

アプローチ 等比数列の和の公式を導く際に用いたテクニック (A 2.3) を応用します．

解答 S と xS の差をとる．

$$\begin{array}{rl} S= & 1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^{n-1} \\ -)\quad xS= & \quad\; x+2x^2+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n \\ \hline (1-x)S= & 1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n \end{array}$$

ここで右辺の初めの n 項は，初項が 1，公比が $x\,(\neq 1)$ の等比数列の第 n 項までの和であるから，$\dfrac{1-x^n}{1-x}$ に等しい．よって

$$(1-x)S=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1-x}$$

$$\therefore\quad S=\boldsymbol{\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}}$$

[注]　上の解答で示した方法は，一般項が (等差数列の項)×(等比数列の項) という形をしている数列の和に応用できる．

さらに，$T=1+4x+9x^2+\cdots\cdots+n^2x^{n-1}$ のような和もこの手法を用いると，少しめんどうだが計算できる．

$$\begin{array}{rl} T= & 1+4x+9x^2+\cdots\cdots+n^2x^{n-1} \\ -)\quad xT= & \quad\; x+4x^2+\cdots\cdots+(n-1)^2x^{n-1}+n^2x^n \\ \hline (1-x)T= & 1+3x+5x^2+\cdots\cdots+(2n-1)x^{n-1}-n^2x^n \end{array}$$

ここで右辺の初めの n 項の和を求めるのに，上記の方法をもう一度用いる．

B.209

次の数列の第 n 項までの和を求めよ．

$$3,\ 33,\ 333,\ 3333,\ \cdots\cdots$$

アプローチ 第 k 項を k の式で表しましょう．$\sum$ を使えば簡単に和がとれます．

解答 この数列の第 k 項を a_k と書くと，

公比10の等比数列の和 ▶

$$a_k = \underbrace{33\cdots\cdots3}_{k\text{ケタ}} = 3(1+10+10^2+\cdots\cdots+10^{k-1})$$

$$= 3\cdot\frac{10^k-1}{10-1} = \frac{1}{3}(10^k-1)$$

$$\therefore\ \text{求める和} = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}10^k - \sum_{k=1}^{n}1\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left\{10\cdot\frac{10^n-1}{10-1} - n\right\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}}$$

［注］ 1° $(3+33+333+\ \cdots\cdots\ +33\cdots\cdots3)\times3$

$$=9+99+999+\ \cdots\cdots\ +99\cdots\cdots9$$

$$=(10-1)+(100-1)+\ \cdots\cdots\ +(100\cdots\cdots0-1)$$

$$=(10+100+\cdots\cdots+100\cdots\cdots0)-n$$

$$=\underbrace{111\cdots\cdots10}_{n+1\text{ケタ}}-n$$

としてもよい．

2° 桁（けた）ごとにたし算をすると $3+33+333+\cdots\cdots+\underbrace{333\cdots\cdots3}_{n\text{ケタ}}$

$$=n\times3+(n-1)\times30+(n-2)\times300+\cdots\cdots+1\cdot\underbrace{300\cdots\cdots0}_{n\text{ケタ}}$$

$$=3\times10^{n-1}\times\left\{1+2\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{10^2}+\cdots\cdots+(n-1)\cdot\frac{1}{10^{n-2}}+n\cdot\frac{1}{10^{n-1}}\right\}$$

となり，これは，B.208で求めたのと同じタイプの和であるとわかる．したがって，これを S とおいて，$S-\frac{1}{10}S$ を計算することにより，S を求めることもできる．

B. 210

次の各和を求めよ．

(1)　$S=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2)　$S=\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

アプローチ　与えられた数列 $\{A_n\}$ に対し，

$$A_k=a_{k+1}-a_k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となる数列 $\{a_n\}$ を見つけることができれば，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$　(途中の項が打ち消しあうから)

となります．

解答　**(1)**　第 k 項 $=\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

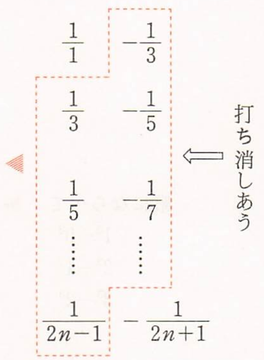
よって，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

右辺の和は，途中の項がすべて打ち消し合って，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 1-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$$



(2)　第 k 項 $=\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

よって

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\boldsymbol{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$

B.211

恒等式 $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$ を利用して，公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を導け．

アプローチ $k^3-(k-1)^3$ の和は簡単に計算されます．(☞ B.210)
また，$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$ (等差数列の和)，$\sum_{k=1}^{n} 1=n$ も使えます．

解答 恒等式 $3k^2-3k+1=k^3-(k-1)^3$ の両辺で，$k=1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ とおいたものを加えあわせると，

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1)=\sum_{k=1}^{n}\{k^3-(k-1)^3\} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

となる．ここで左辺は

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2-3\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=1}^{n} 1=3\sum_{k=1}^{n} k^2-\frac{3}{2}n(n+1)+n \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

であり，一方，右辺の

$$\sum_{k=1}^{n}\{k^3-(k-1)^3\}=(1^3-0^3)+(2^3-1^3)+(3^3-2^3)+\cdots\cdots+\{(n-1)^3-(n-2)^3\}+\{n^3-(n-1)^3\}$$

においては，途中の項がつぎつぎに打ち消しあって，

$$\sum_{k=1}^{n}\{k^3-(k-1)^3\}=n^3-0^3=n^3 \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

となる．②，③を①へ代入して整理すると，

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{3}\left\{n^3+\frac{3}{2}n(n+1)-n\right\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad ■$$

縦にならべて

$$\begin{array}{rr} & 1^3-0^3 \\ & 2^3-1^3 \\ & 3^3-2^3 \\ & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ & (n-1)^3-(n-2)^3 \\ +) & n^3-(n-1)^3 \\ \hline & n^3-0^3 \end{array}$$

と書くと，打ち消しあうのがよくわかる．

［注］ 同様にして，恒等式

$$k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$$

から，公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

を導くことができる．

B.212

次の各和を求めよ．

(1)　1から始まる連続するn個の奇数の平方の和

(2)　$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$

アプローチ　第k項をkの式で表すことが第1着手です．

解答　(1)　1から数えて，k番目の奇数は $2k-1$ であるから，

$$\text{求める和}=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

◀ 基本公式

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)}$$

(2)　第k項$=k(n+1-k)$ であるから，

$$\text{求める和}=\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}$$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

◀ $n+1$ は定数なのでΣの前に出る．

$$=(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

◀ 基本公式

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

［注］ (1)において次のようなこともできる．

$$1^2+3^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\{1^2+2^2+\cdots\cdots+(2n)^2\}-\{2^2+4^2+\cdots\cdots+(2n)^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k^2$$

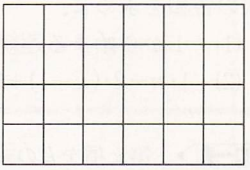
$$=\frac{1}{6}2n(2n+1)(4n+1)-\frac{4}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

B.213

縦に等間隔にひいたm本の平行線と，これに垂直にひいた同じ間隔のn本の平行線がある．この図形中に正方形はいくつあるか．

ただし，$m \geqq n$ とする．



アプローチ 正方形の大きさで分類します．$m=7$，$n=5$ などの具体的な場合を考えてみるのもよいでしょう．

解答 各平行線の間隔を1とし，1辺kの正方形の数を求める．間隔kの縦の2本の平行線は

$$(m-k)\text{ 組}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m-1)$$

間隔kの横の2本の平行線は

$$(n-k)\text{ 組}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

あって，これらの平行線を1組ずつ定めると，1辺がkの正方形が決まる．

▶ たとえば $m=7$，$n=5$ として確かめてみよ．

よって，1辺がkの正方形の数は

$$(m-k)(n-k)\text{ 組}$$

である．

▶ $m \geqq n$

そして，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ であるから，正方形の総数Nは

▶ たとえば，$m=n=2$，$m=3$，$n=2$ などにつき検算せよ．

$$N=\sum_{k=1}^{n-1}(m-k)(n-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\{mn-(m+n)k+k^2\}$$

$$=mn\sum_{k=1}^{n-1}1-(m+n)\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

$$=mn(n-1)-(m+n)\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-1)(3m-n-1)}$$

B.214

n個($n\geqq 7$)の席が横一列に並んでいる．ここにA，B，Cの3人を着席させるのだが，3人は仲が悪いので，隣りあう2人の間には空席が2個以上できるようにしたい．空席の組合せの数Nを求めよ．

アプローチ　席を3つ(誰がどれにすわるかを定めずに)選べばよい．3つの席のうち中央の席を固定して考えると数えやすいでしょう．

解答　着席する席を決めれば空席も決まるので，n個の席に1，2，3，……，nの番号をつけ，3人の着席する席の番号をx，y，z($1\leqq x<y<z\leqq n$)とおく．問題は

$$\begin{cases} 1\leqq x \\ x+3\leqq y \\ y+3\leqq z\leqq n \end{cases}$$

を満たす整数x, y, zの組の数を数えることである．

◀A，B，Cの誰が，x，y，zのどの席につくかは，問題としていない．

yのとりうる値は，$y=4$，5，……，$n-3$であるから，kを$4\leqq k\leqq n-3$の定整数として，yの値を$y=k$と決めると，x，zのとりうる値は，それぞれ

$$\begin{cases} x=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k-3 & \text{の}(k-3)\text{通り} \\ z=k+3,\ k+4,\ \cdots\cdots,\ n & \text{の}(n-k-2)\text{通り} \end{cases}$$

である．よって，整数(x, z)の組は，$(k-3)\times(n-k-2)$個できる．

$$\therefore\quad N=\sum_{k=4}^{n-3}(k-3)(n-k-2)$$

$k-3=i$とおくと，

$$\begin{aligned} N&=\sum_{i=1}^{n-6}i(n-i-5)=(n-5)\sum_{i=1}^{n-6}i-\sum_{i=1}^{n-6}i^2 \\ &=(n-5)\cdot\frac{1}{2}(n-6)(n-5) \\ &\quad-\frac{1}{6}(n-6)(n-5)(2n-11) \\ &=\boldsymbol{\frac{1}{6}(n-6)(n-5)(n-4)} \end{aligned}$$

[注]　まずxを固定して，y，zを数えることもできる．また，$n-4$個の席の中からA，B，Cを着席させる席3つを選び(${}_{n-4}C_3$)，3人の間に2つずつ空席をふやすと考えれば，Nをすばやく求めることができる．

B.215

(1)　1から始まる連続奇数の最初のN項の和を求めよ．

(2)　1から始まる連続奇数を次のような群に分けるとき，第n群に属する数の和はいくらか．

$(1),\ (3,\ 5),\ (7,\ 9,\ 11),\ (13,\ 15,\ 17,\ 19),\ \cdots\cdots$

アプローチ　(1)　等差数列の和です．　(2)　第n群に属するn個の数は等差数列をなしますから，その和を計算することは容易でしょう．しかし(1)を利用することもできます．

解答　**(1)**　初項1，公差2の等差数列の最初のN項の和は，

$$\frac{1}{2}N\{2\cdot1+2(N-1)\}=N^2$$

(2)　第n群には，n個の数が属しているから，第n群の最後の数は，

$$N=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\quad\cdots\cdots\ ①$$

項目に当る．また第$(n-1)$群の最後の数は

$$N'=1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$$

項目に当る．

第n群に属する数の和は

(第n群までの数の和)$-$(第$(n-1)$群までの数の和)

であることより，(1)の結果から求める和は

$$N^2-N'^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$$
$$=\boldsymbol{n^3}$$

［注］　(2)において，次のように考えてもよい．第$n-1$群の最後の数は$(N'=)\frac{1}{2}(n-1)n$番目だから，第n群の最初の数は

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$$

である．よって第n群は初項n^2-n+1，公差2，項数nの等差数列をなすので，それらの和は

$$\frac{1}{2}n\{2(n^2-n+1)+2(n-1)\}=n^3$$

となる．

B. 216

自然数1, 2, 3, 4, ……を右図のように順に並べてゆく.

(1)　第1行第k列の数a_kをkで表せ.

(2)　第10行第20列の数を求めよ.

(3)　2000は第何行第何列にあるか.

行＼列	1	2	3	4	5	-----
1	1	2	4	7	11	
2	3	5	8			
3	6	9				
4	10					
5						
⋮						

解答　(1)　1を第1群, 2, 3を第2群, 4, 5, 6を第3群, 7, 8, 9, 10を第4群, 等々と名づけると, 第1行第k列は, 第k群の最初の数である.

第 $k-1$ 群の最後の数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(k-2)+(k-1)=\frac{1}{2}k(k-1)$$

であるから, 第k群の最初の数は,

$$\boldsymbol{a_k=\frac{1}{2}k(k-1)+1}$$

(2)　第p行第q列の数は, 第$(p+q-1)$群のp番目の数である.

よって, 第10行第20列は, 第29群の10番目にあり, その数は

$$a_{29}+9=407+9=\mathbf{416}$$

(3)　2000が第k群に属するとすると,

$$a_k \leqq 2000 < a_{k+1}$$

が成立する. すなわち

$$\frac{1}{2}k(k-1)+1 \leqq 2000 < \frac{1}{2}(k+1)k+1$$

$$\therefore\quad k(k-1) \leqq 3998 < (k+1)k$$

$$\therefore\quad k=63$$

◀ $k \fallingdotseq \sqrt{4000}$

ここで, $a_{63}=1954$ であることから, 2000は第63群の47番目である.

よって, 2000は, **第47行第17列**にある.

B.217

1, 2, 3, ……, n の中から異なる2数をとり出してその積をつくる．これらの積の総和 S_n を求めよ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

アプローチ いろいろな方針があります．

(1) $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots$ $\cdots+a_{n-1}a_n)$ という展開公式を利用する．

(2) S_{n+1} と S_n との差が $1\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)+\cdots\cdots+n\cdot(n+1)$ であることを利用する．

それぞれの方針で解いてみましょう．

解答 **(その1)**

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \\ +2\{1\cdot 2+1\cdot 3+\cdots\cdots+(n-1)n\}$$

において，右辺の{ }の内はちょうど S_n になっている．

$$\therefore \quad S_n=\frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2 \\ -(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)\}$$

B.211[注] ▶

$$=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)}$$

(その2) $n \geqq 1$ のとき

$$S_{n+1}-S_n=(1+2+3+\cdots\cdots+n)(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)^2$$

であるから，$n \geqq 2$ のとき

$S_1=0$ ▶

$$S_n=S_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}k(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^3+2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}(n-1)^2n^2+\frac{1}{3}(n-1)n(2n-1) \\ +\frac{1}{2}n(n-1)\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)}$$

B.218

c_1, c_2, ……, c_n は n 個の自然数 1, 2, ……, n を大きい方から順に並べた数列とする．また，a_1, a_2, ……, a_n は 1, 2, ……, n を任意の順序で並べた数列とし，

$$b_k=n+1-a_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

とおく．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kc_k$ を n の式で表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-b_k)^2\geqq 0$ であることを用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kb_k\leqq\sum_{k=1}^{n}k^2$ を証明せよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k\geqq\sum_{k=1}^{n}kc_k$ を証明せよ．

解答 (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kc_k=\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$

$$=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-b_k)^2\geqq 0$ であるから

◀負でない n 個の数の和は負でない．

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k\cdot b_k+\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\geqq 0 \quad \cdots\cdots\ ①$$

ここで，集合 $\{{b_1}^2,\ {b_2}^2,\ \cdots\cdots,\ {b_n}^2\}$ は，集合 $\{1^2,\ 2^2,\ \cdots\cdots,\ n^2\}$ と一致しているから，

◀b_1, b_2, ……, b_n は，全体として 1, 2, ……, n に一致している．

$$\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2=\sum_{k=1}^{n}k^2 \quad \cdots\cdots\ ②$$

①，②より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kb_k\leqq\sum_{k=1}^{n}k^2$ ■　……… ③

(3) ③に $b_k=n+1-a_k$ を代入すると

$$\sum_{k=1}^{n}k(n+1-a_k)\leqq\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}ka_k\geqq\sum_{k=1}^{n}(n+1)k-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k-k^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)=\sum_{k=1}^{n}kc_k \quad ■$$

[注] 本問は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k$ の最小値を求めたことになる．

B.219

数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ．

(1) $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

解答 (1) $n=1$ のとき 左辺$=1=$右辺．

$n=m$ のとき成立すると仮定すると，

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^3=\sum_{k=1}^{m} k^3+(m+1)^3$$
$$=\frac{1}{4}m^2(m+1)^2+(m+1)^3=\frac{1}{4}(m+1)^2(m+2)^2$$

となり，

$n=m+1$ のときも成立する．■

(2) $n=1$ のとき 左辺$=6=$右辺．

$n=m$ のとき成立すると仮定すると，

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)(k+2)=\sum_{n=1}^{m} k(k+1)(k+2)+(m+1)(m+2)(m+3)$$
$$=\frac{1}{4}m(m+1)(m+2)(m+3)+(m+1)(m+2)(m+3)$$
$$=\frac{1}{4}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$$

となり，

$n=m+1$ のときも成立する．■

［注］ 1° B.211［注］のようにして(1)を証明することもできる．

2° (1)と B.211 を用いて(2)を示すこともできる．

3° (2)と同様の方法により

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1),\ \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$$

を求めることもできる．☞ C.8

4° (2)は $\{n(n+1)(n+2)\}$ を階差数列とする数列の1つとして $\left\{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)\right\}$ が取れる（これを示すのは簡単），ということからも示すことが出来る．同様にして $\{n(n+1)\}$，$\{n(n+1)(n+2)(n+3)\}$ らを階差数列とする数列は何であるか容易に推測できる．

B. 220

$2^n \leqq n^2$ を満たす正整数 n をすべて求めよ．

アプローチ $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ として 2^n，n^2 の大小を見比べると，答の見当がつきます．

解答 $1 \leqq n \leqq 6$ について，2^n，n^2 の大小を比べると，

n	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	8	16	32	64
n^2	1	4	9	16	25	36

この範囲では $2^n \leqq n^2$ となるのは $n=2, 3, 4$ のみである．そこで

「$n \geqq 5$ なら $2^n > n^2$」と予想して，これを数学的帰納法で示す．

(Ⅰ) $n=5$ のとき $2^n > n^2$ は成立する．

(Ⅱ) $k \geqq 5$ なるある k に対して $2^k > k^2$ が成立したと仮定する．

両辺に 2 をかけて

$$2^{k+1} > 2k^2$$

ここで $k \geqq 5$ だから，

$$2k^2-(k+1)^2 = k^2-2k-1$$
$$=(k-1)^2-2>0$$

$$\therefore \quad 2^{k+1} > (k+1)^2$$

が成立する．

よって数学的帰納法により

$$n \geqq 5 \Longrightarrow 2^n > n^2$$

が示された．以上により

$$2^n \leqq n^2 \Longleftrightarrow n=\mathbf{2,\ 3,\ 4}$$

B. 221

数列 $\{a_n\}$ が $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して

$(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots\cdots+a_n{}^3$　………　①

かつ，$a_n>0$　………　②

を満たすならば，$a_n=n$ であることを証明せよ．

アプローチ　“$a_n=n$” となることを数学的帰納法を使っていえば良いのですが，“$a_m=m \Longrightarrow a_{m+1}=m+1$” を直接示そうとしても無理です．“$a_m=m,\ a_{m+1}=m+1 \Longrightarrow a_{m+2}=m+2$” でも無理です．思いきって“全部”仮定して

$$“a_1=1,\ a_2=2,\ \cdots\cdots,\ a_m=m \Longrightarrow a_{m+1}=m+1”$$

を証明しようと決心するとすぐにできます．

解答　$a_n=n\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を数学的帰納法によって示す．$n=1$ のとき

①より

$$a_1{}^2=a_1{}^3 \qquad \therefore\ a_1{}^2(a_1-1)=0$$

②より $a_1>0$ だから

$$a_1=1$$

そこでmを任意の自然数として，

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ \cdots\cdots,\ a_m=m$$

と仮定する．

①で $n=m+1$ とすると

$$(1+2+3+\cdots\cdots+m+a_{m+1})^2$$
$$=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+m^3+a_{m+1}{}^3$$

$$\therefore\ \left\{\frac{1}{2}m(m+1)+a_{m+1}\right\}^2=\frac{1}{4}m^2(m+1)^2+a_{m+1}{}^3$$

$$a_{m+1}{}^3-a_{m+1}{}^2-m(m+1)a_{m+1}=0$$

$$a_{m+1}(a_{m+1}+m)(a_{m+1}-m-1)=0$$

②より $a_{m+1}>0$ だから，

$$a_{m+1}=m+1,$$

すなわち，

$n=m+1$ のときも $a_n=n$ が成りたつ．■

B. 222

(1)　$a \geqq 1$，$b \leqq 1$ である任意の正の数 a，b に対し，
$a+b \geqq 1+ab$ となることを証明せよ．

(2)　$a_1a_2 \cdots\cdots a_n=1$ である任意の n 個 ($n \geqq 2$) の正の数 a_1，
a_2，……，a_n に対し，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n \geqq n$ となることを
数学的帰納法を用いて証明せよ．

アプローチ　(1)に注意して，変数の個数 n についての数学的帰納法で議論を組立てます．

解答　(1)　$a+b-(1+ab)=-(a-1)(b-1) \geqq 0$ ■

(2)　mを2以上の整数とし,「積が1に等しい，任意のm個の正数の和はm以上である」……(＊)
と仮定する．

◀「任意の m 個」が重要．

いま，積が1に等しい $m+1$ 個の正数 a_1，a_2，……，a_{m+1} をとる．その際　$0<a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_{m+1}$
と仮定しても一般性を失わない．すると，積が1に等しいことから

◀ $m+1$ 個の正数を小さい順に a_1，a_2，……，a_{m+1} とすればよい．

$$a_1 \leqq 1,\ a_{m+1} \geqq 1 \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

でなければならない ($a_1>1$ なら，$a_1a_2 \cdots\cdots a_{m+1}>1$ となり，他方 $a_{m+1}<1$ なら，$a_1a_2 \cdots\cdots a_{m+1}<1$ となってしまうから)．

ところで，m 個の正数 a_1a_{m+1}，a_2，a_3，……，a_m を考えると，それらの積が

$$(a_1a_{m+1})a_2a_3 \cdots\cdots a_m=a_1a_2a_3 \cdots\cdots a_ma_{m+1}=1$$

であることから，仮定(＊)により

$$a_1a_{m+1}+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_m \geqq m \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

が成りたつ．

一方(1)で証明した結果を用いて

$$a_1+a_{m+1} \geqq 1+a_1a_{m+1} \qquad \cdots\cdots \quad ③$$

◀①に注意

が成りたつので，②，③より

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_m+a_{m+1} \geqq m+1$$

が導かれる．

一方，(1)を用いれば，$m=2$ のとき，(＊)が成り立つことは，明らか．

よって，数学的帰納法により，証明すべき命題が示された．■

B.223

$a_1=2$ および漸化式

$$3a_{n+1}+2a_n=5 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

アプローチ $a_{n+1}=pa_n+q$ 型の漸化式です．☞ A2. 8 II

解答 ①は次のように書きなおせる．

$$a_{n+1}=-\frac{2}{3}a_n+\frac{5}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

☞［注］▶

$$a_{n+1}-1=-\frac{2}{3}(a_n-1) \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

③が，すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ について成立することから，

$\{a_n-1\}$ は公比 $-\frac{2}{3}$ の等比数列をなす．

$a_1=2$ ▶

$$\therefore\ a_n-1=(2-1)\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1}$$

［注］ ②から③を導くには，②が

$$a_{n+1}-\alpha=-\frac{2}{3}(a_n-\alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

と同値となるように α を定めればよい．
④を展開して整理すると

$$a_{n+1}=-\frac{2}{3}a_n+\frac{5}{3}\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

となるから，②と⑤を比較して

$$\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\alpha \qquad \therefore\ \alpha=1$$

を得る．

また次のようにしてもよい．②において $a_{n+1}=a_n=\alpha$ とおくと

$$\alpha=-\frac{2}{3}\alpha+\frac{5}{3} \qquad \therefore\ \alpha=1 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

となる．この式は $\alpha=1$ とすると成立する．そこで ②－⑥ を作ると③を得る．

B. 224

①　3つの水漕A，B，Cに水がそれぞれ $1l$，$2l$，$2l$ 入っている．はじめにAとBの間で水をやり取りしてAとBを同じ水量にし，次にBとCの間で同様の操作をし，さらにCとAの間で同様の操作をする．以下これを繰り返すとき n 回目の水のやり取りに関与しなかった水漕の水量を求めよ．

アプローチ　AとBの間でやり取りしたあとのA，Bの水量はそのとき関与しないCの水量で決まります．

解答　n 回目のやり取りに関与しなかった水漕の水量を $a_n(l)$ とすると，やり取りのあった2つの水漕の水量はともに

$$\frac{5-a_n}{2}(l)$$

◀水量の合計は $1+2+2=5l$

となる．よって

$$a_{n+1}=\frac{5-a_n}{2}$$

が成立する．これを次のように変形する．

$$a_{n+1}-\frac{5}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{5}{3}\right)$$

よって，

$$a_n-\frac{5}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1-\frac{5}{3}\right)$$

$a_1=2$ であったから

$$\boldsymbol{a_n=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を得る．

［注］　このとき

$$\frac{5-a_n}{2}=\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから，3つの水槽の水量は

$$\frac{5}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(l),\ \frac{5}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(l),\ \frac{5}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(l)$$

である．

　これらの水量が水漕A，B，Cのどれに当るかは，n を3で割ったときの剰余で決まる．

B.225

$$\begin{cases} a_1=3 & \cdots\cdots ① \\ a_{n+1}=2a_n+(-3)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を次のおのおのの方法で求めよ．

(1)　$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおき，$\{b_n\}$ についての漸化式をたてる．

(2)　$\alpha_n=k\cdot(-3)^n$ (k；定数) という形の数列 $\{\alpha_n\}$ で，$\alpha_{n+1}=2\alpha_n+(-3)^n$ を満足するものを見つけ，数列 $\{a_n-\alpha_n\}$ についての漸化式をたてる．

A 2.8 III 解法 I ($a_{n+1}=a_n+q(n)$ の形に帰着させる)

解答　**(1)**　②の両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

ゆえに，$n\geqq 2$ とすると

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^k=\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{3}{2}\right)^n$$

$n=1$ のときも正しい

$$\therefore\quad a_n=2^n\cdot b_n=\boldsymbol{\frac{6\cdot 2^n-(-3)^n}{5}}$$

A 2.8 III 解法 II (等比数列に帰着させる)

(2)　$\alpha_n=k\cdot(-3)^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が

$$\alpha_{n+1}=2\alpha_n+(-3)^n \qquad \cdots\cdots\cdots ②'$$

を満足するための条件は，

$$k\cdot(-3)^{n+1}=2\cdot k\cdot(-3)^n+(-3)^n$$

$\therefore\quad k=-1/5$ となることである．

このとき，②－②′ を作ると

$$a_{n+1}-\alpha_{n+1}=2(a_n-\alpha_n) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となるので，数列 $\{a_n-\alpha_n\}$ は，公比 2 の等比数列をなしている．$\therefore\quad a_n-\alpha_n=2^{n-1}(a_1-\alpha_1)$

$$\begin{aligned}\therefore\quad a_n&=\alpha_n+2^{n-1}(a_1-\alpha_1)\\&=-\frac{1}{5}(-3)^n+2^{n-1}\left(3-\frac{3}{5}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{-(-3)^n+12\cdot 2^{n-1}}{5}}\end{aligned}$$

[注]　$\dfrac{a_n}{(-3)^n}=c_n$ とおき，$\{c_n\}$ の漸化式を作る方針もある．(A 2.8 II)

B.226

$$\begin{cases} a_1=1 & \cdots\cdots ① \\ a_n=\dfrac{2a_{n-1}+1}{3a_{n-1}+4} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　$b_n=\dfrac{3a_n-1}{a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{b_n\}$ の漸化式を作り，b_n を求めよ．

(2)　(1)の結果を利用して，a_n を求めよ．

解答　(1)　$n\geqq 2$ のとき，②より

$$b_n=\frac{3a_n-1}{a_n+1}=\frac{3\cdot\dfrac{2a_{n-1}+1}{3a_{n-1}+4}-1}{\dfrac{2a_{n-1}+1}{3a_{n-1}+4}+1}=\frac{3a_{n-1}-1}{5(a_{n-1}+1)}=\frac{1}{5}b_{n-1}$$

が成り立つので，$\{b_n\}$ は，公比 1/5 の等比数列である．また①より $b_1=1$ だから

$$b_n=(1/5)^{n-1}=\mathbf{1/5^{n-1}}$$

(2)　$\dfrac{3a_n-1}{a_n+1}=\dfrac{1}{5^{n-1}}$ を a_n について解くと

$$a_n=\mathbf{\frac{5^{n-1}+1}{3\cdot 5^{n-1}-1}}$$

［注］　一般に，漸化式 $a_n=\dfrac{pa_{n-1}+q}{ra_{n-1}+s}$ ($p,\ q,\ r,\ s$ は $ps-qr\neq 0$ の定数) を解くことは，連立漸化式 $\begin{cases} x_n=px_{n-1}+qy_{n-1} \\ y_n=rx_{n-1}+sy_{n-1} \end{cases}$ を解くことと，したがってまた，行列 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の n 乗を計算することと密接な関連をもっている．本問(1)の置換も，行列の理論に基いている．この理論を理解するには数学Cで学ぶ行列の理論についての進んだ知識が不可欠である．したがってここでは，天下り的に，置換のテクニックを紹介するにとどめよう．

$t=\dfrac{pt+q}{rt+s}$ が異なる2根 $t=\alpha,\ \beta$ をもつとき，$b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ とおくと，$\{b_n\}$ が等比数列になる．

B.227

漸化式

$$a_{n+2}=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．

(1) ①が

$$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n) \qquad \cdots\cdots ②$$

と同値になるような数 p，q を2組求めよ．

(2) $a_1=0$，$a_2=1$ および①を満たす数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

アプローチ (1) ①と②を比較します．(2) 2組の $(p,\ q)$ を利用します．

解答 **(1)** ②は

$$a_{n+2}=(p+q)a_{n+1}-pqa_n \qquad \cdots\cdots ③$$

と書き直せる．①と③の係数を比較して

p，q は2次方程式 $t^2-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}=0$ の2根．

$$p+q=\frac{2}{3},\quad pq=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad (p,\ q)=\left(-\frac{1}{3},\ 1\right),\ \left(1,\ -\frac{1}{3}\right)$$

(2) $(p,\ q)=\left(-\frac{1}{3},\ 1\right)$ とすると②は

$b_n=a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$ とおくと，$b_{n+1}=b_n$

$$a_{n+2}+\frac{1}{3}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n$$

となるから

$$a_{n+1}+\frac{1}{3}a_n=a_2+\frac{1}{3}a_1=1 \qquad \cdots\cdots ④$$

$(p,\ q)=\left(1,\ -\frac{1}{3}\right)$ とすると②は

$c_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$c_{n+1}=-\frac{1}{3}c_n$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$$

となるから

$$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(a_2-a_1)=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤より a_{n+1} を消去して

$$a_n=\frac{3}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

を得る．

B.228

$$a_1=\frac{1}{1},\quad a_2=\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\quad a_3=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\quad \cdots\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$$ (分数を表す水平線は n 本)

$\cdots\cdots$

で定まる数 a_n ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) を既約分数 $\frac{p_n}{q_n}$ で表す．

(1)　p_{n+1}, q_{n+1} を p_n, q_n で表せ．

(2)　q_n を求めよ．

アプローチ　(1)　a_{n+1} を a_n で表します．(2)　☞ B.227

解答　(1)　$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}=\frac{q_n}{p_n+q_n}$

ここで，p_n と q_n は1以外の公約数をもたないので，

$$\boldsymbol{p_{n+1}=q_n} \ \cdots\cdots \ ① \qquad \boldsymbol{q_{n+1}=p_n+q_n} \ \cdots\cdots \ ②$$

◀ $\frac{q_n}{p_n+q_n}$ は既約分数．

(2)　①，②より

$$q_{n+2}=p_{n+1}+q_{n+1}=q_{n+1}+q_n$$

これを

$$q_{n+2}-\alpha q_{n+1}=\beta(q_{n+1}-\alpha q_n) \ \cdots\cdots \ ③$$

と書き直す．ただし

$$(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)$$

◀ $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-1$ とすればよい．☞ B.227

このとき③から，

$$q_{n+1}-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}q_n=\left(\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(q_2-\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}q_1\right)$$

◀ 複号同順

q_{n+1} を消去し，$q_1=1$, $q_2=2$ を用いると

$$\boldsymbol{q_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$$

を得る．

B.229

漸化式

$$a_1=\frac{1}{2},\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n+1}{2}}\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を考える．

(1)　$0<a_n<1$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を示せ．

(2)　$a_n=\cos\theta_n$　$\left(0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことにより a_n を求めよ．

アプローチ　(1)　数学的帰納法を用います．　(2)　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\cos\theta+1}{2}$ という公式があります(数学Ⅱ)．図形を描いて証明できます．

解答　**(1)**　$0<a_k<1$ が成立するとき

$$\frac{1}{2}<\frac{a_k+1}{2}<1$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{\frac{a_k+1}{2}}<1$$

$$\therefore\ 0<a_{k+1}<1$$

また $0<a_1<1$ であるから，数学的帰納法により，

$$0<a_n<1\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成立する．■

(2)　まず(1)により

$$a_n=\cos\theta_n\quad\left(0<\theta_n<\frac{\pi}{2}\right)$$

なる θ_n が存在する．特に $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$ である．

このとき，

$$\begin{cases}\cos\theta_{n+1}=\sqrt{\dfrac{\cos\theta_n+1}{2}}=\cos\dfrac{\theta_n}{2}\\ 0<\dfrac{\theta_n}{2}<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

であるから $\theta_{n+1}=\dfrac{1}{2}\theta_n$ となり，

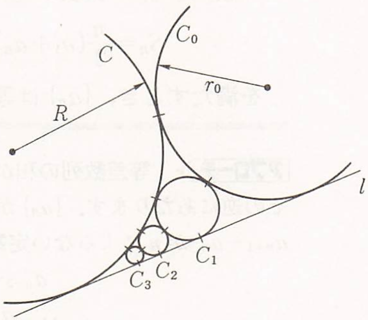
$$\theta_n=\frac{\theta_1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\ \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ a_n=\boldsymbol{\cos\left(\frac{1}{2^{n-1}}\ \frac{\pi}{3}\right)}$$

を得る．

B.230

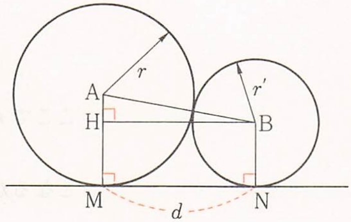
たがいに外接する2円C, C_0が共通接線lの同じ側にあるとする．図のように，
C, C_0, lに接する円をC_1,
C, C_1, lに接する円をC_2,
………
C, C_{n-1}, lに接する円をC_n
とするとき，円C_nの半径r_nを，円Cの半径Rと円C_0の半径r_0とnとで表せ．



解答 右図のように，半径r, r' $(r>r')$の2円が外接しているとき，共通接線の接点間の距離をdとすると，

$$\begin{cases} d=\text{MN}=\text{BH},\ \text{AB}=r+r' \\ \text{AH}=\text{AM}-\text{BN}=r-r' \end{cases}$$

$$\therefore\ d=\sqrt{\text{AB}^2-\text{AH}^2}$$
$$=\sqrt{(r+r')^2-(r-r')^2}=2\sqrt{rr'}$$



したがって，右下図において，

$$\overline{\text{PP}_n}=\overline{\text{PP}_{n+1}}+\overline{\text{P}_n\text{P}_{n+1}}$$
$$\therefore\ \sqrt{Rr_n}=\sqrt{Rr_{n+1}}+\sqrt{r_nr_{n+1}}$$

が成り立つ．両辺を$\sqrt{Rr_nr_{n+1}}$で割ると

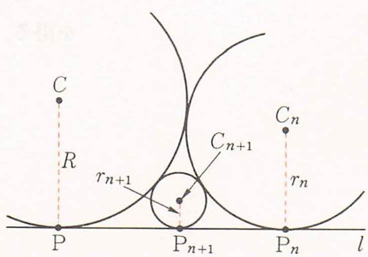
$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}+\frac{1}{\sqrt{R}}$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を得る．よって数列$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}\right\}$は，

初項$\dfrac{1}{\sqrt{r_0}}$，公差$\dfrac{1}{\sqrt{R}}$の等差数列となり

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_0}}+n\cdot\frac{1}{\sqrt{R}}$$
$$\therefore\ r_n=\left(\frac{1}{\sqrt{r_0}}+\frac{n}{\sqrt{R}}\right)^{-2}=\frac{\boldsymbol{Rr_0}}{(\sqrt{\boldsymbol{R}}+\boldsymbol{n}\sqrt{\boldsymbol{r_0}})^2}$$

を得る．



B.231

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)\quad \cdots\cdots\cdots\ ①$$

を満たすとき，$\{a_n\}$ は等差数列であることを示せ．

アプローチ 等差数列の和が①で与えられることは有名です．本問はその逆にあたります．$\{a_n\}$ が等差数列となるための条件は $a_{n+1}-a_n$ が n によらない定数となること，すなわち

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$$

$$\therefore\quad a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$$

です．

解答 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

であるから，①より

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{2}(a_1+a_{n+1})-\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$=\frac{n+1}{2}a_{n+1}-\frac{n}{2}a_n+\frac{1}{2}a_1$$

$$\therefore\quad (n-1)a_{n+1}=na_n-a_1\quad \cdots\cdots\cdots\ ②$$

ここで n を $n+1$ で置き換えると，

$$na_{n+2}=(n+1)a_{n+1}-a_1\quad \cdots\cdots\cdots\ ③$$

となるから，③−② を作って

$$na_{n+2}-(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-na_n$$

$$\therefore\quad a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

を得る．よって $\{a_n\}$ は等差数列である．■

［注］ $a_2-a_1=d$ とおき

$$a_n=a_1+(n-1)d\qquad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)\quad \cdots\cdots\cdots\ ④$$

が成立することを数学的帰納法を用いて②から示すこともできる．

④は $n=2$ のとき明らかに成立し，また④を②に代入すると

$$a_{n+1}=a_1+nd$$

となる．

B. 232

自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$(2-\sqrt{3})^n$ という形の数を考える．これらの数はいずれも適当な自然数mが存在して $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ という表示を持つことを示せ．

解答　各nに対し，$(2-\sqrt{3})^n$ が

$$\begin{cases}(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}\\ \quad a_n,\ b_n\ \text{は，}\ a_n{}^2=3b_n{}^2+1\ \text{を満たす自然数}\end{cases}$$

の形に表されることを数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき，$a_1=2$，$b_1=1$ とすればよい．

確かに，$a_1{}^2=3b_1{}^2+1$ である

$n=l$ のとき正しいと仮定する．すなわち，

$$(2-\sqrt{3})^l=a_l-b_l\sqrt{3},\qquad a_l{}^2=3b_l{}^2+1$$

なる自然数 a_l，b_l が存在する，と仮定する．

このとき $(2-\sqrt{3})^{l+1}=(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^l$

$$=(2-\sqrt{3})(a_l-b_l\sqrt{3})$$

$$=(2a_l+3b_l)-(a_l+2b_l)\sqrt{3}$$

より，$a_{l+1}=2a_l+3b_l$，$b_{l+1}=a_l+2b_l$ とおくと

a_{l+1}，b_{l+1} は $(2-\sqrt{3})^{l+1}=a_{l+1}-\sqrt{3}\,b_{l+1}$

を満たす自然数であり，また

$$a_{l+1}{}^2-3b_{l+1}{}^2=(2a_l+3b_l)^2-3(a_l+2b_l)^2$$

$$=a_l{}^2-3b_l{}^2=1$$

より，$a_{l+1}{}^2=3b_{l+1}{}^2+1$ の成り立つことがわかる．

これですべてのnに対し，

$$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3},\ a_n{}^2=3b_n{}^2+1$$

を満たす自然数 a_n，b_n の存在がわかった．

これより，$m=a_n{}^2$ とおけば

$$(2-\sqrt{3})^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

という表示の成り立つことがわかる．■

[注]　$(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$　(a_n，b_n は自然数) という表示に対し，実は $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$　($\sqrt{3}$ を $-\sqrt{3}$ でおきかえた式) が成り立つ．これから

$$a_n{}^2-3b_n{}^2=(a_n+b_n\sqrt{3})(a_n-b_n\sqrt{3})$$

$$=(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=\{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}^n=1$$

すなわち，$a_n{}^2=3b_n{}^2+1$ はただちに得られる．

B.233

2 項定理を用いて，次の各式が成り立つことを示せ．

(1)　${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$　$(1\leqq r\leqq n-1)$

(2)　$${}_{2n}\mathrm{C}_r=\begin{cases}{}_n\mathrm{C}_0\cdot{}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_{r-1}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_r\cdot{}_n\mathrm{C}_0 & (0\leqq r\leqq n\text{ のとき})\\ {}_n\mathrm{C}_{r-n}\cdot{}_n\mathrm{C}_n+{}_n\mathrm{C}_{r-n+1}\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-1}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\cdot{}_n\mathrm{C}_{r-n} & (n+1\leqq r\leqq 2n\text{ のとき})\end{cases}$$

アプローチ　「大学への数学 I ニューアプローチ」B.322 で扱った式です．(1), (2)ともに，$(1+x)^m$ の形をした多項式の係数に関する等式と考えます．

解答　(1)

$$\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_rx^r=(1+x)^n$$
$$=(1+x)\cdot(1+x)^{n-1}$$
$$=(1+x)\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_rx^r$$
$$=\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_rx^r+\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_rx^{r+1}$$
$$=1+\sum_{r=1}^{n-1}({}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1})x^r+x^n$$

▷ $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_rx^r=1+\sum_{r=1}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_rx^r$

ここで，x^r の係数を比べて，求める式を得る．■

(2)　$$\sum_{r=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_rx^r=(1+x)^{2n}$$
$$=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$$
$$=\Big(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^k\Big)\Big(\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_lx^l\Big)$$
$$=\sum_{r=0}^{2n}\Big(\sum_{k+l=r}{}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_l\Big)x^r$$

▷ $\displaystyle\sum_{k+l=r}$ は $k+l=r$ を満たす，k, l の組 $(k,\ l)$ すべてにわたる和を表す．たとえば $\displaystyle\sum_{k+l=2}({}_n\mathrm{C}_k\cdot{}_n\mathrm{C}_l)={}_n\mathrm{C}_0\cdot{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{C}_0$

ここで x^r の係数を比べて，求める式を得る．■

[注]　組合せの個数 ${}_n\mathrm{C}_r$ に関する他のさまざまな公式も 2 項定理を用いて示してみよう．

B. 234

$\left(x-\dfrac{2}{x^2}\right)^{12}$ を展開したとき，x^3の項の係数，x^4 の項の係数をそれぞれ求めよ．

アプローチ 二項定理

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

において，　$a=x$,　$b=-\dfrac{2}{x^2}$,　$n=12$ と代入してみます．

解答 この展開式の一般項は，$r=0, 1, 2, \cdots\cdots, 12$ として

$$ {}_{12}\mathrm{C}_r x^{12-r}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^r=(-1)^r 2^r {}_{12}\mathrm{C}_r x^{12-3r} \quad \cdots\cdots ①$$

である．

これがx^3の項となるのは，

$12-3r=3$ として，$r=3$　　　　$\cdots\cdots$ ②

のときである．

◀もしも，r の値が 0，1，2，……，12 のうちにないなら x^3 の項はない．

その係数は，①の係数で②とおいて

$$(-1)^3 2^3 {}_{12}\mathrm{C}_3=-8\cdot\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=\mathbf{-1760}$$

次に，①が x^4 の項となるのは r が $12-3r=4$ を満たすときであるが，そのような r の値は存在しない．よって，展開式における x^4 の項の係数は **0** である．

B. 235

次の各項の展開式において，指定された係数を求めよ．

(1)　$(2x-1)^4(3x+5)^5$ の x^7 の係数．

(2)　$(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots\cdots+(1+x)^n$ の x^3 の係数．

アプローチ　(2)　2項係数の定義を直接用いると，求める係数は

$${}_3C_3+{}_4C_3+\cdots\cdots+{}_nC_3$$

と表されますが，この値を計算するのはすこし面倒です．($\sum_{k=1}^{n}k^3$，$\sum_{k=1}^{n}k^2$ などの公式を使うことになります)．与えられた式が，公比 $(1+x)$ の等比数列であることを利用しましょう．

解答　(1)　$(2x-1)^4$ の展開式の一般項は

$${}_4C_r(2x)^{4-r}(-1)^r$$

$(3x+5)^5$ の展開式の一般項は

$${}_5C_s(3x)^{5-s}5^s$$

$$(r=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 4\ ;\ s=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 5)$$

> この式の s を r とかいてはダメ．後で，上の r と混乱してしまう．

である．これから

$(2x-1)^4(3x+5)^5$ の展開式の一般項は

$$(-1)^r2^{4-r}3^{5-s}5^s\cdot{}_4C_r\cdot{}_5C_s\cdot x^{9-(r+s)}$$

これが x^7 の項となるには，$9-(r+s)=7$，

$$\therefore\quad r+s=2$$

これを満たす $(r,\ s)$ の組は

$$(r,\ s)=(0,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ 0)$$

これに対する係数を加えて，

$$(-1)^0 2^4 3^3 5^2{}_4C_0\cdot{}_5C_2+(-1)^1 2^3 3^4 5^1{}_4C_1\cdot{}_5C_1+(-1)^2 2^2 3^5 5^0{}_4C_2\cdot{}_5C_0$$

$$=2^4 3^3 5^2\cdot10-2^3 3^4 5\cdot4\cdot5+2^2 3^5\cdot6$$

$$=108000-64800+5832=\mathbf{49032}$$

(2)　与式は，公比 $(1+x)$ の等比数列の和で，

$$与式=\frac{(1+x)\{(1+x)^n-1\}}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)}{x}$$

> $x\neq0$ として計算しているが，そうしてよい．(分数式の計算である．)

よって，$(1+x)^{n+1}$ の展開式の x^4 の係数が求めるもので，

$${}_{n+1}C_4=\boldsymbol{\frac{1}{24}(n+1)n(n-1)(n-2)}$$

B. 236

(1) $11^{100}-1$ は末尾に連続していくつの0をもつか.

(2) 0.99^{10} の値を小数点以下第3位まで(第4位以下は切りすてて)求めよ.

アプローチ $11^{100}=(10+1)^{100}$, $0.99^{10}=(1-0.01)^{10}$ として2項定理を用います.

解答 (1) $11^{100}-1=(10+1)^{100}-1$

$$=10^{100}+{}_{100}C_1 10^{99}+{}_{100}C_2 10^{98}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+{}_{100}C_{97}10^3+{}_{100}C_{98}10^2+{}_{100}C_{99}10+1-1$$

において,

$${}_{100}C_{97}10^3={}_{100}C_3 10^3=161700000,$$
$${}_{100}C_{98}10^2={}_{100}C_2 10^2=495000,$$
$${}_{100}C_{99}10={}_{100}C_1 10=1000$$

であるから,

$$11^{100}-1=10^4(10^{96}+{}_{100}C_1 10^{95}+\cdots\cdots+{}_{100}C_{96})+162196000$$
$$=10^4\times(\text{正整数})+162196000$$

(答) **3個**

(2) $0.99^{10}=(1-0.01)^{10}$

$$=1+{}_{10}C_1(-0.01)+{}_{10}C_2(-0.01)^2+{}_{10}C_3(-0.01)^3+R$$

ただし, R は展開の第5項以下であって,

$$|R|\leqq {}_{10}C_4(0.01)^4+{}_{10}C_5(0.01)^5+\cdots\cdots+{}_{10}C_{10}(0.01)^{10}$$
$$<({}_{10}C_4+\cdots\cdots+{}_{10}C_{10})(0.01)^4$$
$$<7\times{}_{10}C_5\times10^{-8}$$
$$<10^{-4}$$

◀各項の符号をすべて正に変えた.

◀$(0.01)^4>(0.01)^n\ (n>4)$

◀${}_{10}C_5\geqq{}_{10}C_n$

◀$7\times{}_{10}C_5=1764<10^4$

と評価されるので

$$0.99^{10}=1-0.1+0.0045-0.00012+R$$
$$=0.904+(0.00038+R)$$

とまとめたとき, 第2項は, 小数第4位から始まる正の数である. よって, 0.99^{10} の小数第3位までの値は, **0.904** である.

B.237

$(x+2y-z)^6$ の展開式における x^2y^3z の係数を，2 項定理を用いて求めよ．

アプローチ まず，$(x+2y-z)^6$ を x の整式とみたときの x^2 の係数を調べるために，$2y-z$ を定数とみたてて 2 項定理を適用します．

解答 $(x+2y-z)^6=\{x+(2y-z)\}^6$

として，右辺を 2 項定理で展開すれば，その一般項は 2 項定理より

$${}_6C_r x^{6-r}(2y-z)^r \quad \cdots\cdots ①$$

であるから，x^2y^3z の項は $6-r=2$ とおいて，

$${}_6C_4 x^2(2y-z)^4 \quad \cdots\cdots ②$$

のうち含まれる．

さらに $(2y-z)^4$ を展開して

この式で s を r と書いてもよいが．

$${}_6C_4x^2(2y-z)^4={}_6C_4x^2\sum_{s=0}^{4}{}_4C_s(2y)^{4-s}(-z)^s \quad \cdots\cdots ③$$

とすると，x^2y^3z の項は $s=1$ に相当するので

その係数 $={}_6C_4\cdot{}_4C_1 2^3(-1)^1$

$=15\cdot4\cdot8(-1)=\mathbf{-480}$

注意 $(a+b+c)^n=\{a+(b+c)\}^n$ と考えて，同様の処理をすれば

$$(a+b+c)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r a^{n-r}(b+c)^r=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r a^{n-r}\{\sum_{s=0}^{r}{}_rC_s b^s c^{r-s}\}$$

これから，

$$a^{n-r}b^sc^{r-s} \text{ の係数}={}_nC_r\cdot{}_rC_s=\frac{n!}{(n-r)!s!(r-s)!}$$

を得る．別の表し方をすれば

$$a^pb^qc^r \text{ の係数}=\frac{n!}{p!q!r!} \quad (\text{但し } p+q+r=n)$$

である．

（ ）の中がさらに多くの項からなる場合においても同様の式が成立する．たとえば $(a+b+c+d)^n$ の展開式において

$$a^pb^qc^rd^s \text{ の係数}=\frac{n!}{p!q!r!s!} \quad (p+q+r+s=n)$$

が成り立つ．このような命題を，多項定理とよぶ．

B. 238

$(1+x+x^2)^5$ の展開式での x^6 の係数を多項定理から求めよ.

アプローチ 展開の一般項のうち，x のべきが x^6 となっている項をすべて集めます.

解答 展開式の一般項は，多項定理より

$p+q+r=5$ として，

$$\frac{5!}{p!q!r!}1^p\cdot x^q\cdot(x^2)^r=\frac{5!}{p!q!r!}x^{q+2r}$$

◁ 前問の[注意] 2項定理を2回使ってもよい.

これが x^6 の項となるような p, q, r の負でない整数の組は

$$\left.\begin{array}{r} p+q+r=5 \\ q+2r=6 \\ p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ r\geqq 0 \end{array}\right\}$$

の整数解を順に探して求められるが，それは，右の3組である.

	p	q	r	$\frac{5!}{p!q!r!}$ の値
(1)	0	4	1	$\frac{5!}{0!4!1!}=5$
(2)	1	2	2	$\frac{5!}{1!2!2!}=30$
(3)	2	0	3	$\frac{5!}{2!0!3!}=10$

展開式を整理すれば，x^6 の項の係数は，この3組の係数の和となるから，

x^6 の係数$=5+30+10=$**45**

[注]　2項定理におけるパスカルの三角形に相当するものを，$(1+x+x^2)^n$ に対して考えると，

```
                    1
                 1  1  1
              1  2  3  2  1
           1  3  6  7  6  3  1
        1  4 10 16 19 16 10  4  1
     1  5 15 30 45 51 45 30 15  5  1
    ………………………………………………
```

となる.(左上，真上，右上の3項の和を書いてゆく. 空欄は0とみなす.)

Repos

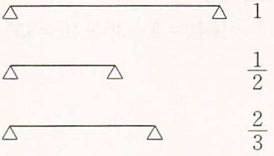
調和数列

数列 $\{a_n\}$ において，その逆数が等差数列をなしているとき，$\{a_n\}$ は調和数列をなすといいます．このことばの由来を説明しましょう．

バロック時代の作曲家A，ヴィヴァルディの有名な協奏曲「調和の幻想」が正しくは「和声の試み」と訳されるように，調和 (harmony) ということばは，複数の音が響きあって協和音を形成していることを意味しています．

合奏や合唱で経験されるように，複数の異なる音程の音が同時に奏でられたときにそれらが混じり合って美しい響きが生まれる，という不思議な現象があります．音の重なりは，数学的には，波＝周期関数の和でありそれぞれの周期 (＝音程) の間に特定の関係があるとき，重なりあってきれいな音の波がでる——これが和音の基本原理です．

和音のもつ神秘に最初に注目したのは，ピュタゴラース学派の人々でした．彼等は，同じ張力で張った弦において，弦の長さの変化に対応して音程がどのように変化するかを調べたのです．そして，弦の長さが $1:1/2$ の 2 つの弦の音は，互いによく響きあうこと，さらに，その間に $2/3$ の弦を挿入しても，美しい和音が作られること，一般に，長さが $a:b:c$ の弦は，逆数の比 $1/a$, $1/b$, $1/c$ が等差数列をなすとき，和音を作り出す，という根本法則を発見したと伝えられています．ピュタゴラース学派の人々は，この発見をもとに，音階の理論を作りました．今日，これをピュタゴラース音階といいます．ただし，この音階は，あまりに複雑であるために，今日では，ピアノなどの近代的な鍵盤楽器のために作られた音階 (平均律) が標準的になっています．

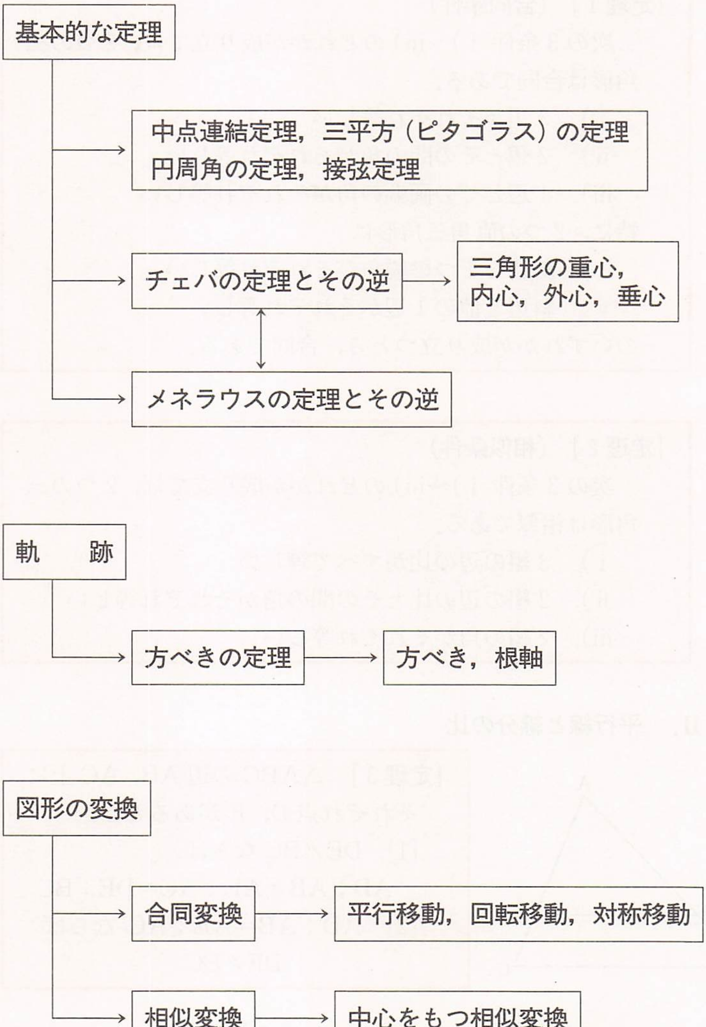






§3 平面幾何

□ キー・ワード　（A基礎理論篇）



A3.1　基本的な定理

ここでは，中学校において学んだ平面幾何のいくつかの定理を思い出す．

I．三角形の合同と相似

[定理 1]（合同条件）

次の 3 条件 i)〜iii) のどれかが成り立てば，2 つの三角形は合同である．

i)　3 辺がそれぞれ等しい

ii)　2 辺とその間の角がそれぞれ等しい

iii)　1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい

特に，2 つの直角三角形は

iv)　斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい

v)　斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい

のいずれかが成り立つとき，合同である．

[定理 2]（相似条件）

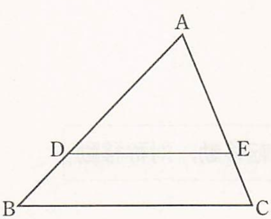
次の 3 条件 i)〜iii) のどれかが成り立てば，2 つの三角形は相似である．

i)　3 組の辺の比がすべて等しい

ii)　2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい

iii)　2 組の角がそれぞれ等しい

II．平行線と線分の比



[定理 3]　△ABC の辺 AB，AC 上にそれぞれ点 D，E があるとき，

[1]　DE∥BC ならば

AD : AB＝AE : AC＝DE : BC

[2]　AD : AB＝AE : AC　ならば

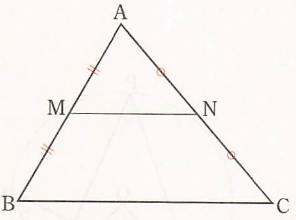
DE∥BC

次の定理は，定理３の特別な場合である.

［定理４］（中点連結定理）

△ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とするとき，

MN∥BC かつ $MN=\frac{1}{2}BC$

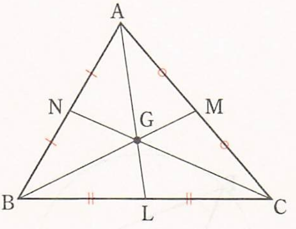


［定理５］（三角形の重心）

△ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N とするとき，３本の中線 AL，BM，CN は１点で交わり，この点は各中線を２：１に内分する.この点を△ABC の **重心** といい，G と表すとき

AG：GL＝BG：GM

　　＝CG：GN＝2：1



ガイド☆ 証明 ☞B.301

III. 三平方の定理（ピタゴラスの定理）

［定理６］（ピタゴラス〈Pythagoras〉の定理）

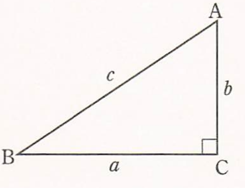
∠C が直角である直角三角形 ABC の３辺の長さを

BC＝a，CA＝b，AB＝c　……(1)

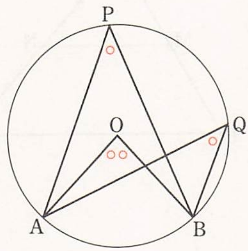
とするとき，

$a^2+b^2=c^2$　……(2)

逆に，△ABC の３辺の長さ(1)に対して，(2)が成り立つならば△ABC において，∠C は直角である.



Ⅳ. 円周角



［定理７］（円周角の定理）

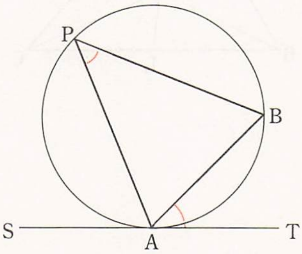
円において１つの弧に対する円周角は，その弧に対する中心角の $\frac{1}{2}$ である．

また，同じ弧に対する円周角はすべて等しい．

つまり，左図において

$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ （Oは円の中心）

$\angle APB = \angle AQB$



［定理８］（接弦定理）

直線STがAにおいて円と接しているとき，Aを一端とする弦ABとSTのつくる角は弧ABの円周角に等しい．つまり，

$\angle BAT = \angle APB$

A3.2　チェバの定理

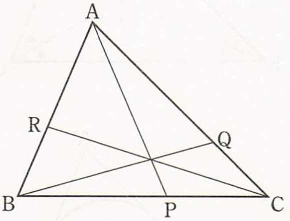
中学の幾何の範囲を越えた考察として，まず，三角形の各頂点から対辺に引いた3線分が1点で交わるための条件を調べよう．

I．　チェバの定理

[定理9]　(チェバ〈Ceva〉の定理)

△ABCの3辺BC，CA，AB上にそれぞれ点P，Q，Rがあり，3直線AP, BQ, CRが1点で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



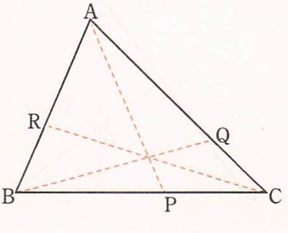
ガイド　証明　☞B.303

[定理10]　(チェバの定理の逆)

△ABCの3辺BC，CA，AB上にそれぞれ点P，Q，Rがあり，

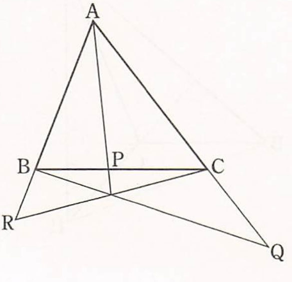
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つとき，3直線AP，BQ，CRは1点で交わる．



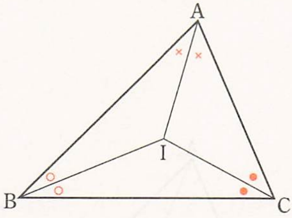
ガイド　証明　☞B.304

1°　定理9，10において，点P，Q，Rが辺BC，CA，AB上に限らず，2点だけが辺の延長上にある場合でも，一定の条件のもとで同様の事実が成立する．これらを一般に，チェバの定理およびその逆と呼ぶ．



II.　三角形の内心・外心・垂心

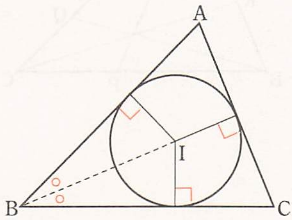
中学校で学んだ三角形の外接円の中心は外心という．外心や，上で学んだ重心以外にも，三角形の重要な特殊な点として内心，垂心がある．



[定理11]

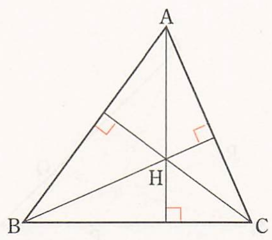
△ABC の 3 つの頂角の 2 等分線は 1 点で交わる．

ガイド 証明 ☞ B. 305 (2)



1°　この交点を △ABC の **内心** といい，I と表すことが多い．

内心 I は各頂角の 2 等分線上にあるから 3 辺 BC，CA，AB から等距離にある．したがって，I を中心とし，3 辺に接する円が存在する．この円を △ABC の **内接円** という．

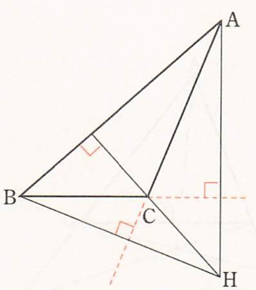


[定理12]

△ABC の 3 つの頂点から対辺に下した垂線は 1 点で交わる．

ガイド 証明 ☞ B. 306 (1)

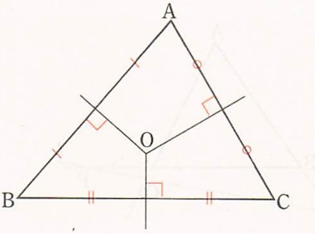
2°　この交点を △ABC の **垂心** といい，H と表すことが多い．



3°　定理 12 は，△ABC が鈍角三角形，直角三角形であるときにも成立する．

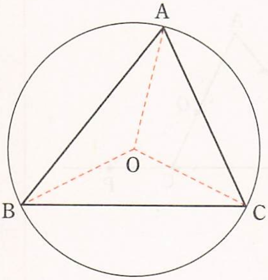
この場合，たとえば，頂点 A から直線 BC に下した垂線を，「頂点 A から対辺へ下した垂線」と考えることにする．

> **[定理13]**
> 　△ABC の 3 辺の垂直 2 等分線は 1 点で交わる．



ガイド☆ 証明 ☞ B.306(2)

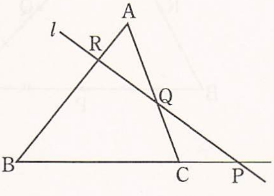
4°　この交点を △ABC の **外心** といい，O と表すことが多い．
　外心 O は各辺の垂直 2 等分線上にあるから，3 頂点 A，B，C から等距離にある．したがって，O を中心とし，3 頂点を通る円が存在する．この円を △ABC の **外接円** という．



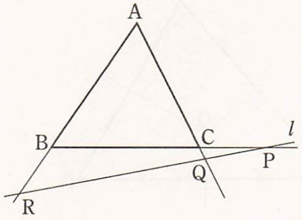
A3.3　メネラウスの定理

三角形の 3 辺またはその延長上にある 3 点が 1 直線上にあるための条件を調べよう．

> **[定理14]**　(メネラウス 〈Menelaus〉 の定理)
> 　△ABC と，3 頂点 A，B，C のいずれをも通らない直線 l が辺 BC，CA，AB またはその延長とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき
> $$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

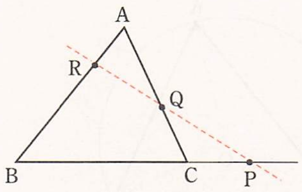


ガイド☆ 証明 ☞ B.307



1°　3 頂点 A，B，C を通らない直線 l は△ABC の内部を通るとき，2 辺と交わって，残りの辺と交わらない．

また，それ以外のときには 3 辺のいずれとも交わらない．



[定理15]（メネラウスの定理の逆）

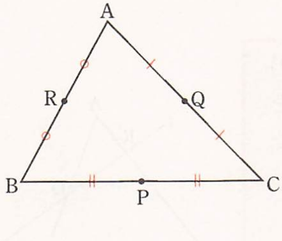
△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長上にそれぞれ点 P，Q，R があり，これら 3 点のうち 1 点だけ，または 3 点が辺の延長上にあって，

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つとき，3 点 P，Q，R は 1 直線上にある．

ガイド　証明 ☞ B. 308

2°　定理 15 において，「この 3 点のうち 1 点だけまたは 3 点が辺の延長上にあって」の部分を省くことはできないことを例によって示しておこう．



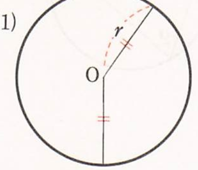
例　たとえば，P, Q, R が辺 BC，CA，AB の中点であるとき，明らかに（$*$）が成り立っているが，P, Q, R は 1 直線上にない．

A3.4 軌 跡

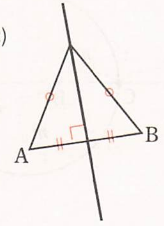
I. 軌 跡

平面上の点についての条件 p を満たす点全体の作る集合(図形)を条件 p を満たす点の軌跡という．たとえば，

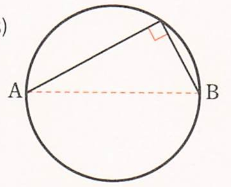
(1) 点Oからの距離が r である点の軌跡は，中心O，半径 r の円である．

(1)


(2) 2点A，Bから等距離にある点の軌跡は，線分ABの垂直2等分線である．

(2)


(3) 2点A，Bのそれぞれを通り，直交する2直線の交点の軌跡は，ABを直径とする円である．

(3)


以上の事実は，中学校で学んだ．

ある条件 p を満たす点の軌跡を求めるということは，軌跡の形状がわかるように，条件 p と同値な，より単純な表現を導くことである．

したがって，条件 p の軌跡が図形 F となることを示すためには，次の(I)，(II)の両方を示すことが必要である．

(I) 条件 p を満たす点はすべて，図形 F 上にある．
(II) 図形 F 上の点はすべて，条件 p を満たす．

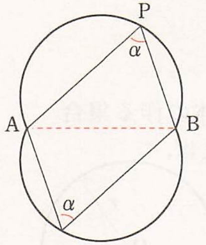
例として，(3)を取り上げよう．すなわち，

例 条件 p を「2点A，Bのそれぞれを通り，直交する2直線の交点である」とするとき，

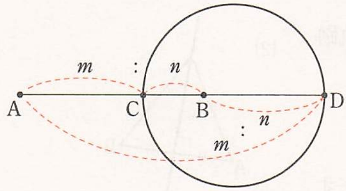
(I) 条件 p を満たす点は，ABを直径とする円上にある．
(II) ABを直径とする円上の点は，条件 p を満たす．

の両方が確かに成り立っている．

上の(1)〜(3)以外の代表的な軌跡には



(4)　2定点A，Bと定角αが与えられたとき，$\angle APB=\alpha$ となる点Pの軌跡は，線分ABを弦とし，ABの上に立つ円周角として角αをもつ点から成る2つの弓形の弧である．



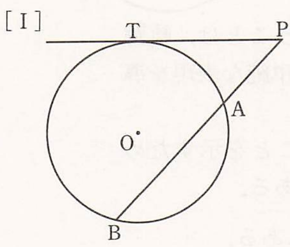
(5)　2定点A，Bと2つの正の数m，n $(m \neq n)$が与えられたとき，

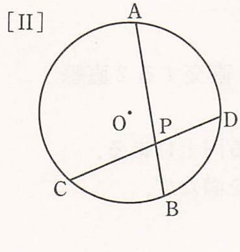
$$PA : PB = m : n$$

となる点Pの軌跡は，ABを$m:n$に内分および外分する点C，Dを直径の両端とする円である．(この円をアポロニウス〈Apollonius〉の円という．)

などがある．

II．方べきの定理





[定理16]　(方べきの定理)

[I]　円Oの外部の点Pから点Tで接する接線と，2点A，Bで交わる直線を引くとき，

$$PA \cdot PB = PT^2 \quad \cdots\cdots (1)$$

[II]　円Oの内部の点Pを通る2直線のそれぞれが，円Oと2点A，Bおよび2点C，Dで交わるとき，

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad \cdots\cdots (2)$$

ガイド☆　証明　☞B．310

1°　[I] において，さらに点Pを通って円Oと2点C，Dで交わる直線を引くとき，

$$PC \cdot PD = (PT^2) = PA \cdot PB$$

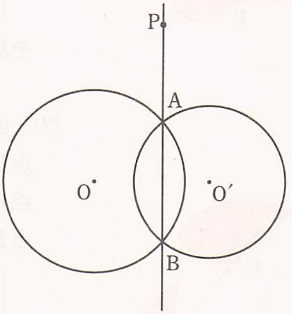
が成り立つことも明らかである．

2°　定理16より，点Pが円Oの外部にあっても，内部にあってもPから円Oと2点A，Bで交わる直線を引くとき，PA・PBの値は直線の引き方によらずに一定である．

点Pが円Oの外部にあるときにはこの値(PA・PB)を，また点Pが円の内部にあるときにはこの値の(−1)倍，(−PA・PB)を点Pから円Oへの **方べき** という．

点Pが円Oの周上にあるときには，方べきの値を0とする．

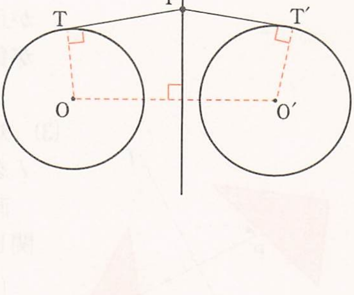
3°　2円O, O′への方べきが等しい点の軌跡を2円O, O′の **根軸** という．



2円O, O′が2点A, Bで交わっているとき，直線AB上の点Pについて，Pが2円の外部，交点上，共通内部のいずれにあるかに応じて，PA・PB, 0, −PA・PBが円O, O′への共通の方べきとなる．

したがって根軸は直線ABである．

2円O, O′が交わらないときも，根軸は直線OO′に垂直で，2円の外部にある直線となることが知られている．



この直線上の点Pの円O, O′への方べきは，Pから円O, O′に引いた接線の長さPT，PT′の平方と一致するから，2円O, O′へ引いた接線の長さが等しい点の軌跡が根軸である．

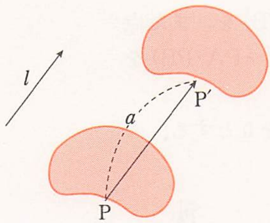
A 3.5　図形の変換

I．　合同変換

中学校で学んだ「合同変換」とは，形と大きさを変えない図形の移動である．基本的な「合同変換」として

平行移動，　回転移動，　対称移動

があることも学んでいる．これらについて復習しよう．



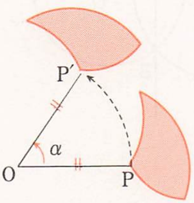
(1)　平行移動

l を向きをもつ直線とし，a を正数とする．

l の方向へ距離 a だけの平行移動とは，点Pを

$$\begin{cases} \mathrm{PP'} /\!/ l \\ (\text{P から P}' \text{ への向きと } l \text{ の向きが等しい}) \\ \mathrm{PP'} = a \end{cases}$$

を満たす点 P′ に移動することである．



(2)　回転移動

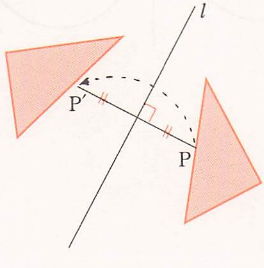
点Oを定点，α を角の大きさとする．

点Oを中心として，角 α だけの回転移動とは，点Pを

$$\begin{cases} \mathrm{OP'} = \mathrm{OP} \\ \angle \mathrm{POP'} = \alpha \end{cases}$$

を満たす点 P′ に移動することである．

ここで，回転には2つの向きがあり，左回りが正の向き，右回りが負の向きであるから，α が負の数の場合もあることに注意しよう．



(3)　対称移動

l を与えられた直線とする．

直線 l を軸とする対称移動とは，点Pを l に関して対称な点 P′ つまり

$$\begin{cases} \mathrm{PP'} \text{ の中点は } l \text{ 上にある．} \\ \mathrm{PP'} \text{ は } l \text{ と垂直である．} \end{cases}$$

を満たす点 P′ に移動することである．

この節の初めに述べたように「合同変換」を“形と大きさを変えない図形の移動”とすることは感覚的にわかるとしても，数学的に意味づけることは難しい．また，そのような変換が，平行移動，回転移動，対称移動およびそれらの組合せに帰着することは事実ではあるが，その証明はやさしくない．そこで今後は，合同変換とは，

> 平行移動，回転移動，対称移動，および
> これらいくつかをひき続いて行う移動

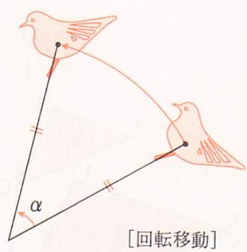
であると定義する立場をとろう．



［平行移動］

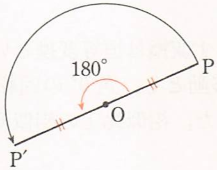
1°　図形Fの平行・回転・対称移動とは図形Fに属するすべての点を平行・回転・対称移動することである．

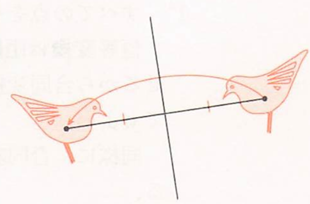
図形Fが合同変換によって，図形F'にうつるとき，対応する部分の長さ，角および面積は不変である．



［回転移動］

2°　点Oに関する点対称移動は点Oを中心として，角180°だけの回転移動に等しい．





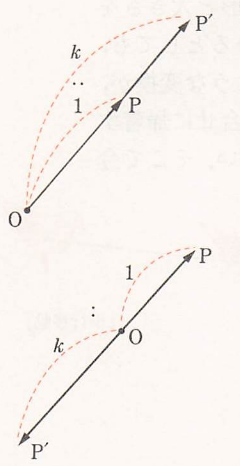
［対称移動］

II．相似変換

中学校で学んだ「相似変換」とは，大きさは変わるかもしれないが，形を変えない図形の変換である．最も代表的な「相似変換」として

中心をもつ相似変換

があり，それは次の通りである．



(1) 中心をもつ相似変換

Oを中心とする相似比 $k(k>0)$ の相似変換とは，点Pを

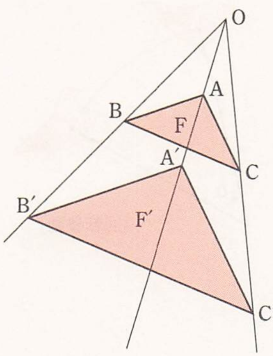
$$\begin{cases} OP'=k\cdot OP \\ OP' \text{ と } OP \text{ はつねに同じ向きである．} \end{cases} \cdots (*)$$

を満たす点P′に移す変換である．

(＊)の代りに

OP′ と OP はつねに逆向きである

を満たす点P′に移す変換も，Oを中心とする相似比 k の相似変換ということもある．



いずれかの変換によって，図形 F が図形 F' に移るとき，F と F' はOを相似の中心として相似の位置にあるという．

Ⅰと同様に，ここでも一般の相似変換とは

いくつかの合同変換と中心をもつ相似変換をひき続いて行う変換

であると定義し直すことにしよう．

1°　すべての点をそれ自身に移す変換は恒等変換という．

恒等変換は距離0の平行移動とも，角0°の回転移動ともみなせるから合同変換である．また，相似比1の相似変換ともみなしてもよい．

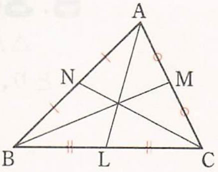
同様に，合同変換は相似変換の特別なものとみなすこともできる．

――― A 3　おわり ―――

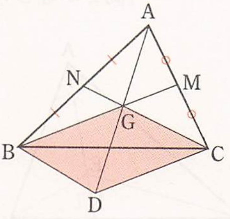


B. 301

△ABCの辺BC，CA，ABの中点をそれぞれL，M，Nとするとき，3本の中線AL，BM，CNは1点で交わり，この点は各中線を2：1に内分することを証明せよ．



アプローチ BMとCNの交点とAを結ぶ直線とBCとの交点がBCの中点と一致することを示すとよいのです．中点連結定理が役に立ちます．



解答 2本の中線BMとCNとの交点をGとし，AGの延長上に，点Dを AG＝GD　………①
となるようにとる．

△ABDにおいて，AB，ADの中点がN，Gであるから中点連結定理より

$$NG=\frac{1}{2}BD \quad \cdots\cdots ②$$

$$NG /\!/ BD \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ．

△ADCにおいて，同様の理由から

$$GM=\frac{1}{2}DC \quad \cdots\cdots ④$$

$$GM /\!/ DC \quad \cdots\cdots ⑤$$

が成り立つ．

③，⑤より

$$GC /\!/ BD, \qquad BG /\!/ DC$$

であるから，四辺形GBDCは平行四辺形である．

◁ 2組の対辺が平行である．

平行四辺形の対角線は互いに他を二等分するから，GDはBCの中点Lを通る．結局，3本の中線AL，BM，CNは点G(△ABCの重心)で交わる．

また，平行四辺形の対辺の長さは等しいので

$$BD=GC, \qquad DC=BG$$

また，上で説明した通り，

$$GL=\frac{1}{2}GD$$

であるから，これらと①，②，④を合わせると

$$AG:GL=BG:GM=CG:GN=2:1$$

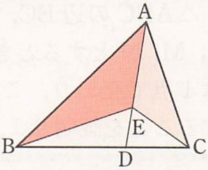
となる．■

B.302

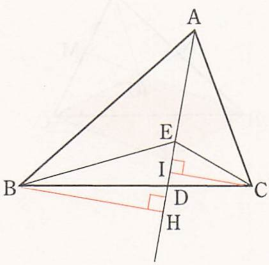
△ABCの辺BC上に点Dをとり，AD上に点Eをとるとき，

$$\frac{\triangle ABE}{\triangle ACE}=\frac{BD}{DC}.$$

これを証明せよ．



アプローチ [底辺が等しい三角形の面積比]＝[高さの比]，[高さが等しい三角形の面積比]＝[底辺の比]を思い出します．



解答 B，Cから直線ADに下した垂線の足をそれぞれH，Iとする．

△ABEと△ACEは底辺AEが共通だから，面積比は高さの比に等しい．つまり，

$$\triangle ABE : \triangle ACE = BH : CI \quad \cdots\cdots ①$$

また，△BHDと△CIDにおいて，2角が等しいから相似であり，

$$BH : CI = BD : CD \quad \cdots\cdots ②$$

①，②を結ぶと

$$\frac{\triangle ABE}{\triangle ACE}=\frac{BH}{CI}=\frac{BD}{DC}$$

が成り立つ．■

B.303

[チェバ(Ceva)の定理]

△ABCの3辺BC，CA，AB上にそれぞれ点P，Q，Rがあり，3直線AP，BQ，CRが1点で交わるとき，

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$$

これを証明せよ．

アプローチ B.302を利用して，示すべき式の左辺を面積比に直すだけで済みます．

解答　3直線 AP，BQ，CR の交点をSとする．

△ABS と △CAS に着目すると，

$$\frac{BP}{PC}=\frac{\triangle ABS}{\triangle CAS}$$

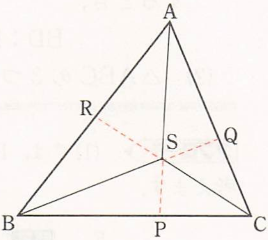
◀ B.302

同様に

$$\frac{CQ}{QA}=\frac{\triangle BCS}{\triangle ABS},\quad \frac{AR}{RB}=\frac{\triangle CAS}{\triangle BCS}$$

これら3式の辺々を掛け合わせて

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1.$$ ■



B.304

［チェバ(Ceva)の定理の逆］

△ABC の3辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つとき，3直線 AP，BQ，CR は1点で交わる．

これを証明せよ．

アプローチ　B.301 の証明と似た議論をします．

解答　BQ と CR の交点をSとし，AS と BC との交点を P′ とする．

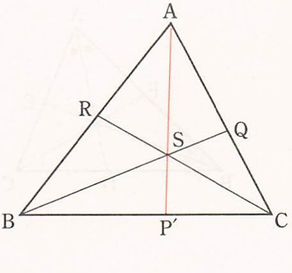
AP′，BQ，CR は1点Sで交わっているから，チェバの定理より，

$$\frac{BP'}{P'C}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

この式と与えられた式から

$$\frac{BP}{PC}=\frac{BP'}{P'C}$$

これより，P と P′ は BC を同じ比に内分するから，P と P′ は一致する．結局，AP，BQ，CR は1点で交わる．



［注］　チェバの定理の逆を適用すると，三角形の3中線が1点で交わること(B.301)は簡単にわかる．

B.305

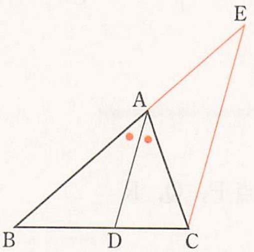
次の(1)，(2)を証明せよ．

(1)　△ABC の ∠A の 2 等分線と対辺 BC との交点を D とするとき，

$$BD:DC=AB:AC$$

(2)　△ABC の 3 つの頂角の 2 等分線は 1 点で交わる．

アプローチ　(1)では，B または C を通り，AD に平行な直線を引いて考えます．



解答　(1)　C を通り，AD に平行な直線と AB の延長との交点を E とすると

$\angle ACE=\angle CAD$　（⇦ 平行線の錯角）

$\angle AEC=\angle BAD$　（⇦ 平行線の同位角）

ここで，$\angle CAD=\angle BAD$ であるから

$\angle ACE=\angle AEC$

であり，△ACE は二等辺三角形となり

$AC=AE.$

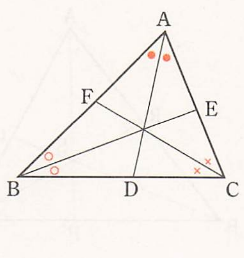
A3.1 定理 3 ▶　よって，AD∥CE を考え合わせると

$BD:DC=BA:AE=AB:AC.$ ■

(2)　△ABC の ∠A，∠B，∠C の 2 等分線と辺 BC，CA，AB との交点を順に D，E，F とする．

(1)の結果より

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{CA},\ \frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB},\ \frac{AF}{FB}=\frac{CA}{BC}$$



これら 3 式の辺々を掛け合わせると

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{AB}{CA}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{CA}{BC}=1$$

したがって，チェバの定理の逆より，3 つの頂角の 2 等分線 AD，BE，CF は 1 点で交わる．■

［注］　(1)の結果は

“三角形の頂角の二等分線は対辺を隣辺比に内分する”

と覚えておくと便利．

B.306

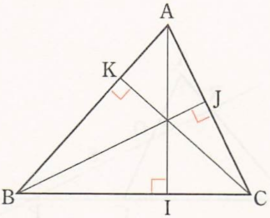
次の(1), (2)を証明せよ.

(1)　△ABCの各頂点から対辺に下した3つの垂線は1点で交わる.

(2)　△ABCの3辺の垂直2等分線は1点で交わる.

アプローチ　(2)では，各辺の中点を頂点とする三角形に着目します.

解答　(1)　A, B, Cから対辺BC, CA, ABに下した垂線の足を順にI, J, Kとし，BC=a, CA=b, AB=c とおく.



△ABIと△CBKはいずれも直角三角形であり，∠Bは共通だから

$$\triangle \mathrm{ABI} \backsim \triangle \mathrm{CBK}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AB:BI=CB:BK}$$

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BK}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}=\frac{c}{a}$$

同様に,

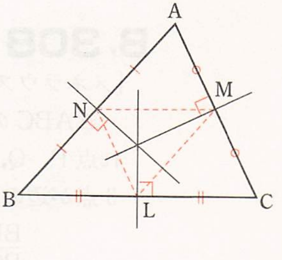
$$\frac{\mathrm{CJ}}{\mathrm{CI}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{a}{b},\quad \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AJ}}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BA}}=\frac{b}{c}$$

これらをまとめて,

$$\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IC}}\cdot\frac{\mathrm{CJ}}{\mathrm{JA}}\cdot\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KB}}=\frac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BK}}\cdot\frac{\mathrm{CJ}}{\mathrm{CI}}\cdot\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AJ}}=\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=1$$

チェバの定理の逆より3つの垂線AI, BJ, CKは1点で交わる. ■

(2)　辺BC, CA, ABの中点を順にL, M, Nとする.



中点連結定理より

MN∥BC, NL∥CA, LM∥AB

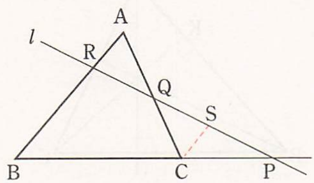
であるから，△ABCの3辺の垂直2等分線は，△LMNの各頂点から対辺に下した3つの垂線と一致する. よって，(1)の結果より，これらは1点で交わる. ■

B. 307

[メネラウス (Menelaus) の定理]

△ABC と，3 頂点 A，B，C のいずれをも通らない直線 l が辺 BC，CA，AB またはその延長とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$.　これを証明せよ.

アプローチ　A，B またはCを通る補助線を引いて考えます.



解答　Cを通り，AB と平行な直線と l との交点をSとおく.

△PBR∽△PCS だから

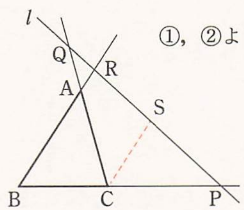
BP : CP＝RB : SC　∴　$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{RB}{SC}$　……①

また，△QAR∽△QCS だから

AR : QA＝CS : QC　∴　$\dfrac{AR}{QA}=\dfrac{CS}{QC}$　……②

$$\therefore\ \frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BP}{PC}\cdot\frac{AR}{QA}\cdot\frac{CQ}{RB}$$

①，②より ▶ $$=\frac{RB}{SC}\cdot\frac{CS}{QC}\cdot\frac{CQ}{RB}=1.$$ ■



[注]　メネラウスの定理は，直線 l が辺 BC，CA，AB の延長と P，Q，R で交わるときにも成立する. 左図を参考にして，この場合の証明を考えて下さい.

B. 308

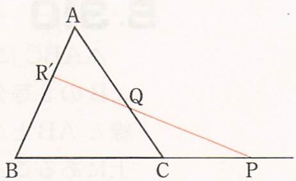
[メネラウス (Menelaus) の定理の逆]

△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長上に，それぞれ点 P，Q，R があり，これら 3 点のうち 1 点だけ，または 3 点が辺の延長上にあって

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つとき，3 点 P，Q，R は一直線上にある.

これを証明せよ.



解答　PがBCの延長上にあると仮定する．

このとき，直線PQは辺ABまたはその延長とA, B以外の点で交わるから，その交点をR′とおくと，メネラウスの定理より

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR'}{R'B}=1$$

この式と与えられた式から

$$\frac{AR}{RB}=\frac{AR'}{R'B}$$

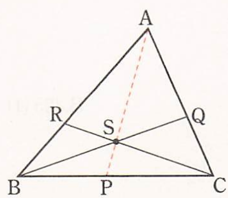
これより，RとR′はABを同じ比に内分または外分するからRとR′は一致する．結局，P, Q, Rは一直線上にある．■

B.309

△ABCにおいて，CAを2：3に内分する点をQ，ABを2：1に内分する点をRとし，BQとCRの交点をS，ASとBCの交点をPとするとき，AS：SPを求めよ．

アプローチ　BP：PCはチェバの定理からわかります．

次に，適当な三角形に着目してメネラウスの定理を適用します．



解答　チェバの定理より

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1,\qquad \frac{BP}{PC}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

∴　BP：PC＝3：4　　………①

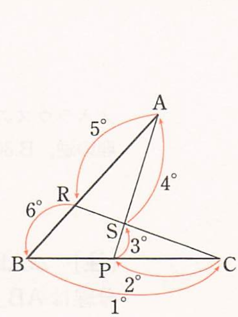
△ABPと直線CRに関して，メネラウスの定理を用いると

$$\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PS}{SA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \qquad\text{………②}$$

①より　　BC：CP＝7：4　だから，

$$\frac{7}{4}\cdot\frac{PS}{SA}\cdot\frac{2}{1}=1$$

∴　AS：SP＝**7：2**

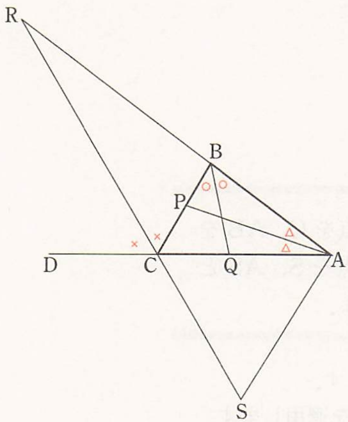


［注］　メネラウスの定理で現われる分数式②の左辺は，右図のように，Bを出発し，Bに戻る1°～6°の線分を分子，分母に交互に並べたものになっています．

B. 310

△ABCにおいて，∠Aの2等分線とBCの交点をP，∠Bの2等分線とCAとの交点をQ，∠Cの外角の2等分線とABとの交点をRとするとき，3点P，Q，Rは一直線上にあることを示せ．ただし，∠A<∠Bとする．

アプローチ 三角形の頂角の2等分線は対辺を隣辺比に内分します（☞ B.305(1)）が，外角の2等分線に関してはどんなことが成り立ちますか？



解答 RCの延長上に，点Sを

$$AS /\!/ BC$$

となるようにとり，ACの延長上の1点をDとする．

△ACSにおいて

$$\angle ACS = \angle RCD = \angle RCB = \angle CSA$$

(最後の等号は，平行線の同位角として成り立つ)

であるから，

$$AC = AS \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

△RAS∽△RBCであるから，①より

$$RA : RB = AS : BC = AC : BC \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．つまり，RはABをCA：CBに外分している．よって，BC$=a$，AC$=b$，AB$=c$とおくとき，②より

$$AR : RB = b : a \qquad \cdots\cdots ③$$

B.305(1) ▶ 一方，内角の2等分線は対辺を隣辺比に内分するから，

$$BP : PC = c : b,\ CQ : QA = a : c \qquad \cdots\cdots ④$$

である．

P，Q，Rは△ABCの辺BC，CAとABの延長上にあって，③，④より

メネラウスの定理の逆．B.308 ▶

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1$$

を満たすから，一直線上にある．■

［注］ △ABCにおいて，∠A=∠Bのときには，∠Cの外角の2等分線はABと平行となり，交点Rはない．

B.311

[方べきの定理]

(1)　円Oの外部の点Pから点Tで接する接線と，2点A，Bで交わる直線をひくとき，

$$PA \cdot PB = PT^2$$

(2)　円Oの内部の点Pを通る2直線のそれぞれが，円Oと2点A，Bおよび2点C，Dで交わるとき，

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

これを証明せよ．

アプローチ　接弦定理，円周角の定理を利用して，相似な三角形を捜し出すと解決します．

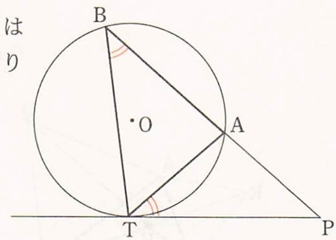
解答　(1)　△PTAと△PBTにおいて，∠Pは共通である．また，接弦定理(A3.1　定理8)より

∠PTA＝∠PBT　　だから

△PTA∽△PBT

∴　PT：PA＝PB：PT

$PA \cdot PB = PT^2$　■



(2)　△PACと△PDBにおいて，

弧CBの円周角として　∠PAC＝∠PDB，

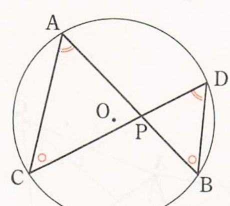
弧ADの円周角として　∠PCA＝∠PBD

だから

△PAC∽△PDB

∴　PA：PC＝PD：PB

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$　■



[注]　(1)において，Pから，円Oと2点C，Dで交わる直線をひくとき，△PACと△PDBにおいて

∠PAC＝∠PDB，　∠PCA＝∠PBD

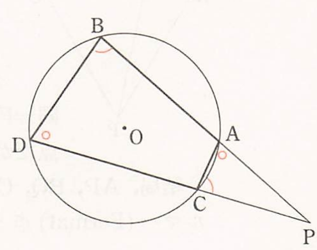
が成り立つから

△PAC∽△PDB

PA：PC＝PD：PB

∴　$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

が，直接導かれる．



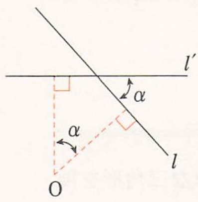
◀ A3.4 II 1°

B. 312

△ABCの外側に，正三角形CQA，ARBをつくり，BQとCRの交点をFとするとき，

$$BQ=CR,\quad \angle QFC=60^\circ$$

となることを証明せよ．



アプローチ　直線 l を，定点Oを中心として角 α $(0^\circ<\alpha<180^\circ)$ だけ回転した直線を l' とするとき，l と l' となす角は α（または $180^\circ-\alpha$）です．

解答　△CQA，△ARBが正三角形であるから，点Aを中心として，60°回転する回転移動 T によって点C，Rはそれぞれ点Q，Bに移される．

したがって，回転移動 T によって，△ARCは△ABQに，特に辺RCは辺BQに移されるから，

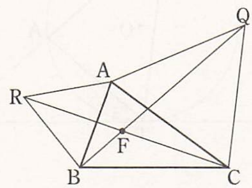
$$BQ=CR$$

かつ，RCとBQのなす角は60°である．

つまり

$$\angle QFC=60^\circ$$

となる．■



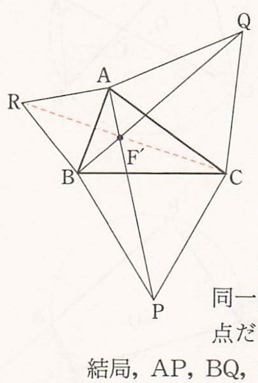
研究　$\angle QFC=\angle QAC=60^\circ$ だから，4点C，Q，A，Fは同一円周上にある．

つまり，Fは△CQAの外接円とBQの交点でもある．

△ABCの外部に，正三角形BPCをつくり，APとBQの交点をF′とすると上と同様

$$AP=BQ,\quad \angle QF'A=60^\circ$$

となる．



$\angle QF'A=\angle QCA=60^\circ$ だから，C，Q，A，F′は同一円周上にあり，F′は△CQAの外接円とBQの交点だから，Fと一致する．

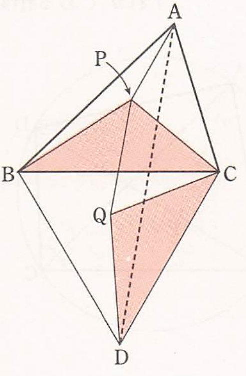
結局，AP，BQ，CRは1点Fで交わる．この点Fを△ABCのフェルマー(Fermat)点と呼ぶことがある．

B.313

△ABC は鋭角三角形とする．△ABC の内部の点 P で，$PA+PB+PC$ を最小にする P の位置を求めよ．

アプローチ PC，BC を 1 辺とする 2 つの正三角形 PCQ，BCD を作ると，$PA+PB+PC$ は，A と D を結ぶある折れ線の長さに等しくなります．

解答 △ABC の内部に点 P をとり，右図のように 2 つの正三角形 BCD，PCQ を作る．



このとき，C を中心として，△CPB を 60° 回転した三角形が △CQD であるから

$$PB=QD, \qquad PC=QC,$$

さらに，$QC=PQ$ であるから

$$PA+PB+PC=AP+PQ+QD \geqq AD \quad \cdots\cdots ①$$

となる．

これより，"A, P, Q, D が一直線に並ぶ"……(＊) ことがあれば，$PA+PB+PC$ は最小値 AD をとることがわかる．

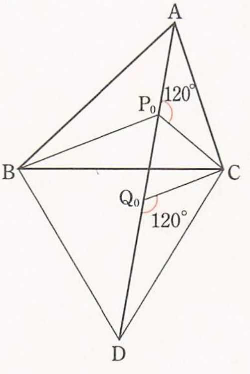
AD 上に

$$\angle CP_0A=120° \quad \angle CQ_0D=120°$$

となる点 P_0, Q_0 をとると，(＊)が満たされる．このとき，$\triangle CP_0Q_0$ は，$\angle P_0=\angle Q_0=60°$ の正三角形となり，C を中心として，$\triangle CP_0B$ を 60° 回転した三角形が $\triangle CQ_0D$ であるから

$$\angle BP_0C=120°$$

である．



結局，求める P の位置は，P_0 であり，

$$\angle AP_0B=\angle BP_0C=\angle CP_0A=120°$$

を満たす点である．

［注］ 1° △ABC の外側に，さらに正三角形 CAE，ABF を作るとき，P_0 は AD，BE，CF の交点でもある．つまり，求めた P の位置は B.312 研究で示した △ABC のフェルマー (Fermat) 点と一致する．

2° △ABC は鋭角三角形でなくても，最大角が 120° より小さいときには，同様の事実が成り立つ．

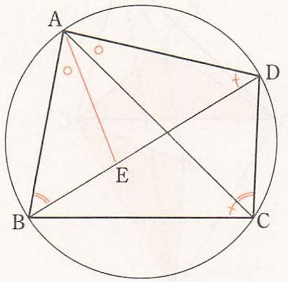
B.314

円に内接する四辺形ABCDの対辺の長さの積の和は対角線の長さの積に等しい：

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$$

これを証明せよ．

アプローチ 左図のような点Eをとり，頂点がA，B，C，D，Eのいずれかである相似な三角形を捜し出すことが最初の仕事です．



解答 BD上に，点Eを

$\angle BAE=\angle CAD$ ………①

をみたすようにとる．

△ABEと△ACDにおいて

$\angle ABE=\angle ACD$ （⇦弧ADの円周角）

だから，①と合わせると

$\triangle ABE \backsim \triangle ACD$

$\therefore$ $AB:BE=AC:CD$

$AB\cdot CD=AC\cdot BE$ ………②

次に，△AEDと△ABCにおいて

$\angle EAD=\angle BAC$ （⇦①の両辺と∠EACの和）

$\angle ADE=\angle ACB$ （⇦弧ABの円周角）

だから，

$\triangle AED \backsim \triangle ABC$

$\therefore$ $AD:ED=AC:BC$

$AD\cdot BC=AC\cdot ED$ ………③

②，③の辺々を加え合わせて

$$\begin{aligned}AB\cdot CD+AD\cdot BC&=AC\cdot BE+AC\cdot ED\\&=AC(BE+ED)\\&=AC\cdot BD\end{aligned}$$ ■

［注］ 1° ここで証明した事実は，トレミー（Ptolemy）の定理とよばれている．

「大学への数学Ⅰニューアプローチ」B.213研究には，三角関数を利用したこの定理の証明がある．

2° この定理の逆も成り立つことが知られている．

B. 315

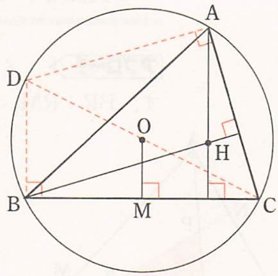
△ABC の外心を O，垂心を H，重心を G とするとき，次の(1)，(2)を証明せよ．

(1)　BC の中点を M とするとき，　AH＝2OM

(2)　O，G，H は，この順で一直線上にあり，

$$OG : GH = 1 : 2$$

アプローチ　外心，垂心の性質から，AH∥OM です．後半では，重心 G が各中線を 2：1 に内分することを利用します．



解答　(1)　C を一端とする直径の他の端を D とおく．中点連結定理により

$$OM=\frac{1}{2}DB,\quad OM /\!/ DB \quad \cdots\cdots ①$$

また，四辺形 ADBH とおいて

DB∥AH　(∵ともに BC と垂直である)

DA∥BH　(∵ともに AC と垂直である)

であるから，平行四辺形である．よって

$$DB=AH,\ DB /\!/ AH \quad \cdots\cdots ②$$

①と②より

$$AH=DB=2OM \quad ■$$

(2)　OH と AM の交点を G′ とすると，

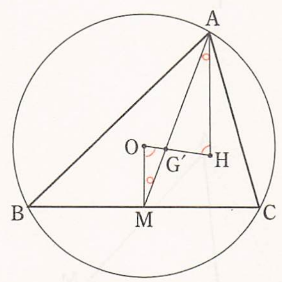
①と②より

$$AH /\!/ OM,\quad AH=2OM$$

であるから

$$\triangle AG'H \backsim \triangle MG'O$$

$$AG' : G'M = 2 : 1$$

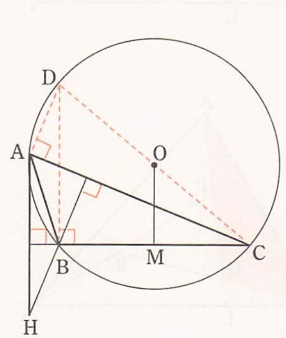


G′ は中線 AM を 2：1 に内分するから，重心 G と一致する．

よって，O，G，H は，この順で一直線上にあり，

$$OG : GH = OM : AH = 1 : 2 \quad ■$$

[注]　△ABC が鋭角三角形でない場合にもこの証明が通用することが右図からわかる．



B. 316

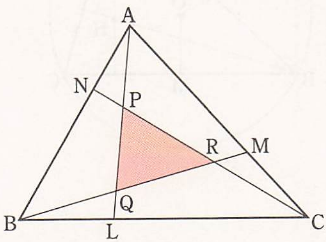
△ABC の 3 辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ L, M, N をとり,

$$\frac{BL}{BC}=\frac{CM}{CA}=\frac{AN}{AB}=k \qquad (0<k<1)$$

とする.

AL と CN の交点を P, AL と BM の交点を Q, BM と CN の交点を R とするとき, △PQR：△ABC を求めよ.

アプローチ メネラウスの定理を利用して, まず, AQ：QL を求めます. BR：RM, CP：PN はこれと同じです.



解答 メネラウスの定理より

$$\frac{CB}{BL}\cdot\frac{LQ}{QA}\cdot\frac{AM}{MC}=1, \qquad \frac{1}{k}\cdot\frac{LQ}{QA}\cdot\frac{1-k}{k}=1$$

∴　$QA：LQ=(1-k)：k^2$

$AQ：AL=(1-k)：(1-k+k^2)$ ………①

全く同様に

$BR：BM=CP：CN=(1-k)：(1-k+k^2)$ ……②

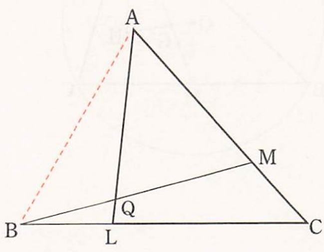
高さが等しい三角形の面積比は底辺の長さの比に等しいから

$△ABL：△ABC=BL：BC=k：1$

$△ABQ：△ABL=AQ；AL=(1-k)：(1-k+k^2)$

よって

$$△ABQ=\frac{1-k}{1-k+k^2}△ABL=\frac{k(1-k)}{1-k+k^2}△ABC$$



全く同様に, ②より

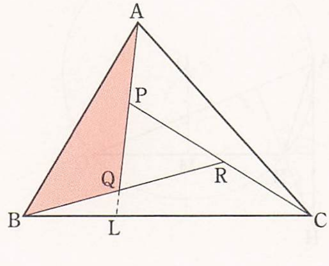
$$△BCR=△CAP=\frac{k(1-k)}{1-k+k^2}△ABC$$

最後に

$$△PQR=△ABC-(△ABQ+△BCR+△CAP)$$

$$=\left\{1-\frac{3k(1-k)}{1-k+k^2}\right\}△ABC$$

より



$$△PQR：△ABC=\boldsymbol{\frac{(2k-1)^2}{1-k+k^2}：1}$$

B. 317

平面上に3つの円 C_1, C_2, C_3 があって，C_1 と C_2 は相異なる2点A，Bで交わり，C_3 は C_1 および C_2 と互いに直交している．ただし，2つの円が互いに直交しているとは，2つの円に共通点があって，各共通点におけるそれぞれの円に対する接線がその共通点で直交しているときをいう．

(1)　円 C_3 の中心は，2点A，Bを通る直線上にあることを示せ．

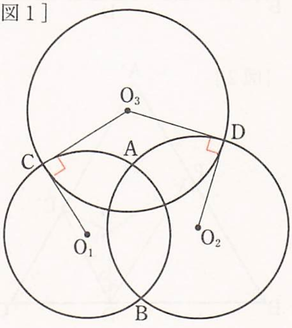
(2)　2点A，Bの一方は円 C_3 の内側に，他方は円 C_3 の外側にあることを示せ．

アプローチ　2つの円が互いに直交するとき，交点における一方の円の接線は他方の円の半径になっていることに注目します．

解答　C_1, C_2, C_3 の中心を O_1, O_2, O_3, C_3 と C_1 および C_2 の共有点の一つを順にC，Dとおく．

C_3 と C_1 および C_2 が互いに直交しているから，O_3C, O_3D は O_3 から C_1, C_2, にひいた接線となっている．[図1]

[図1]



(1)　O_3 とAを結ぶ直線と C_1, C_2 とのA以外の交点を順に B_1, B_2 とおく．[図2]

C_1, C_2 に関して，方べきの定理より

$$O_3A\cdot O_3B_1=O_3C^2 \quad \cdots\cdots ①$$

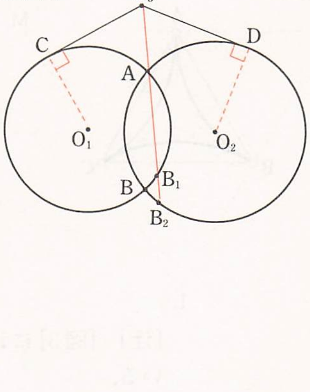
$$O_3A\cdot O_3B_2=O_3D^2 \quad \cdots\cdots ②$$

C_3 の半径として，$O_3C=O_3D$ だから①，②より

$$O_3B_1=O_3B_2$$

これは B_1 と B_2 が一致することを意味し，A以外の C_1 と C_2 の共有点はBしかないから，$B_1=B_2=B$ であり，O_3 とA，Bは同一直線上にある．■

[図2]



(2)　$B_1=B$ であるから，①より

$$O_3A\cdot O_3B=O_3C^2 \quad \cdots\cdots ③$$

O_3 は明らかに，円 C_1 の外部にあり，O_3A と O_3B の値は異なるから，③よりその一方は O_3C より大，他方は O_3C より小である．つまり，A，Bの一方は円 C_3 の内側に，他方は円 C_3 の外側にある．■

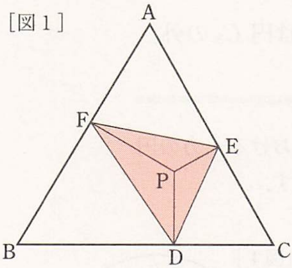
B. 318

正三角形 ABC の内部の点 P から，辺 BC，CA，AB に下した垂線の足をそれぞれ D，E，F とする．

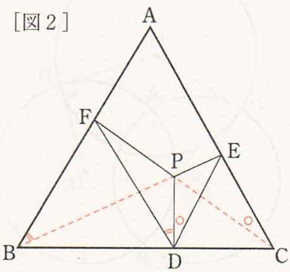
△DEF が直角三角形となるような P の軌跡を求めよ．

アプローチ　たとえば，4 点 P，C，D，E は同一円周上にあるから，円周角の定理の利用が考えられます．

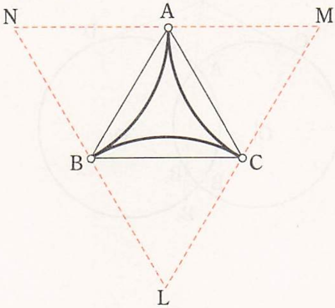
[図 1]



[図 2]



[図 3]



解答　∠PDC，∠PEC が直角であるから，4 点 P，C，D，E は PC を直径とする円周上にある．

$\therefore\quad \angle\mathrm{PDE}=\angle\mathrm{PCE}$　………①

同様に，4 点 P，B，D，F は PB を直径とする円周上にあるから

$\angle\mathrm{PDF}=\angle\mathrm{PBF}$　………②

①，②より，[図 2] において

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{EDF}&=\angle\mathrm{PDE}+\angle\mathrm{PDF}\\&=\angle\mathrm{PCE}+\angle\mathrm{PBF}\\&=(60^\circ-\angle\mathrm{PCB})+(60^\circ-\angle\mathrm{PBC})\\&=120^\circ-(\angle\mathrm{PCB}+\angle\mathrm{PBC})\\&=120^\circ-(180^\circ-\angle\mathrm{BPC})\\&=\angle\mathrm{BPC}-60^\circ\end{aligned}$$

これより，△DEF が ∠D=90° の直角三角形となる条件は

$\angle\mathrm{BPC}=150^\circ$　………③

であり，∠E=90°，∠F=90° の直角三角形となる条件はそれぞれ

$\angle\mathrm{CPA}=150^\circ,\quad \angle\mathrm{APB}=150^\circ$　………④

である．

△ABC の外部に，正三角形 BCL，CAM，ABN を作るとき，③または④を満たす P は，L，M または N を中心とし，半径 BC の円周上，△ABC の内部にある部分 [図 3] である．

(答)　左図の 3 本の円弧（ただし，A，B，C を除く）

[注]　[図 3] における 3 つの円弧は，互いに A，B，C において接している．

§4 計算とコンピュータ

今回の高校数学の指導要領改訂の目玉は，〈コンピュータ教育の認知〉にある．しかし，長い歴史をもつ数学教育と比べ，急速な技術革新により急激に普及し，いまなお，技術革新が進行中のコンピュータに関して，〈何を〉〈いかに〉教えるか，しかも，それを伝統的な数学教育とどう調和させるか，については，まだ，人々の意見は大きく隔っている．本書では，パソコンとパソコンの初心者用言語として普及した BASIC に関する一通りの知識と経験を仮定して，数学Ⅰ，数学Aの単元の中から，コンピュータを利用することの良さを体験できる教材を集め，読者に供することにする．

パソコンの経験の浅い人は，適当な指導者の下で，おのおののプログラムを実行してみるだけでも，パソコンの良さがわかるであろう．

パソコンの操作ができる人は，それぞれのプログラムを実行してみるだけでなく，解説に従ってプログラムを解読し，ときに適当な修整を試みることを通じて，BASIC という言語を習得するだけでなく，数学を計算の手順（アルゴリズム）の視点からより深く理解することができるようになろう．

A4.1 BASIC の基本用語（コマンド，ステートメント）

初めに，BASIC で用いられる必須最小限の基本的な用語をやや強引ではあるが，4つに分割して一覧表にまとめておく．

I．ファイル関係

LOAD …… プログラムをメモリに読み込む．

例 `LOAD "SUURETSU.BAS"`

SAVE …… メモリにあるプログラムをディスクに書き込む（保存）．

例 `SAVE "GRAPH.BAS"`

例 `SAVE "GRAPH.BAS",A`

（後者では，ファイルが MS-DOS のアスキー形式で保存される．）

LIST …… メモリにあるプログラムを画面に表示する．

例 `LIST -200`

（行番号 200 までを表示する．）

例 `LIST 100-`

（行番号 100 以下を表示する．）

II．入出力関係

INPUT …… プログラムの実行を中断して，キー・ボードからの入力を待ち，入力された内容を，指定した変数に格納する．

例 `INPUT A`

例 `INPUT "a=",A`

PRINT …… 指定された文字列または変数の内容を画面に出力する．

例 `PRINT "CONGRATULATION!"`

例 `PRINT "A=",A`

＝ …… 左側に書かれた変数に右側の値（または変数の値）を代入する．

例 `A=10`

例 `S=A`

III.　プログラム実行・制御関係

RUN　……　メモリにあるプログラムを実行する．

GOTO　……　指定された行番号またはラベルにジャンプする．

例　`GOTO 250`

例　`GOTO *JUMP`

IF～GOTO～ELSE～　……　指定された条件が成立するか否かを判定する．

例　`IF I= 10 GOTO 200 ELSE 300`

REM　……　その行をコメント文（remark）として扱い，読み飛ばす．

例　`REM COMPUTER AND MATHEMATICS`

FOR～NEXT　……　指定された回数だけ，間にはさまれたプロセスを反復する．

例
```
FOR I= 1 TO 100
PRINT I
NEXT
```
◀1, 2, 3, …, 100 を表示するプログラム

IV.　算術命令

＋	……	加法	例 `S=A+B`
－	……	減法	例 `D=A-B`
＊	……	乗法	例 `M=A*B`
／	……	除法	例 `V=A/B`
∧	……	累乗	例 `P=A^3`

ひとこと

［特に注意すべきこと］

BASIC では，等号 '＝' は，相等性だけでなく，「右辺を左辺に代入」の意味でも用いる，（後者の方が，頻度が高い！）特に注意すべきは

`S=S+10`

のような用法がある．これは，「変数Sの値に 10 を加えた数を，あらためて，変数Sに代入せよ」という命令である．（ `LET S=S+10` という表現もある．）

A4.2 プログラミング練習

I. 規則的に並んだ数の和を求める

1+2+3+4+5

のように規則正しく並べられた数の和を求めるプログラムは，

FOR 〜 NEXT　文

を利用すると簡単に作れる．

```
10 S=0
20 FOR I=1 TO 5
30 S=S+1
40 NEXT
50 END
```

（20〜40行）この間が“FOR〜NEXT〜”ループ

このプログラムを実行するとIの値を1ずつ増加させながら，行番号30の命令を実行する．この場合には，行番号30，40を通過するごとに，SとIの値がそれぞれ下のように変化していく．

行番号	S	I	
10	0	1	⟶ 20行目の判定
30	0+1=1		
40		2	⟶ 5以下だから続行
30	1+2=3		
40		3	⟶ 5以下だから続行
30	3+3=6		
40		4	⟶ 5以下だから続行
30	6+4=10		
40		5	⟶ 5以下だから続行
30	10+5=15		
40		6	⟶ 5以下でないので脱出

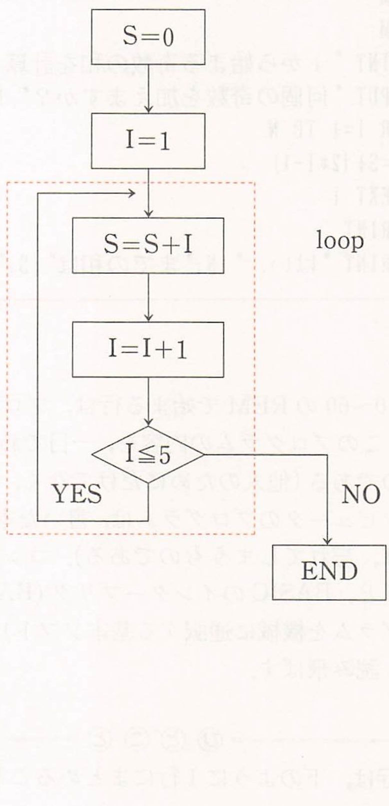
最後のＩの値　I=6 は，20行で指定された範囲を超えるので，ここで　FOR～NEXT の処理(ループ)から抜ける．

このようにして，この処理が完了した段階で，変数Ｓには，

$$1+2+3+4+5=15$$

という値が格納されていることになる．

コンピュータの行う処理を，プログラムを書くのが便利なように細かい手順に分解するために，流れ図(Flow Chart フロー・チャート)と呼ばれる，下図のような図形を書くことが推奨された時代もあった．



プログラム例1 **奇数列の和**

この考え方に基づいて，1から始まる奇数の列の和

$$1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)$$

を計算するのが，次のプログラムである．

```
10 REM -----------------------------------------
20 REM
30 REM 奇数の列の和
40 REM  1+3+5+....+(2*N-1) の値
50 REM -----------------------------------------
60 REM
70 PRINT "1から始まる奇数の和を計算します．"
80 INPUT "何個の奇数を加えますか？",N
90 FOR I=1 TO N
100 S=S+(2*I-1)
110 NEXT I
120 PRINT
130 PRINT "はい、";N;"までの和は";S;"です．"
```

行番号10〜60のREMで始まる行は，プログラムの本体ではないが，このプログラムの内容を，一目でわかるようにするためのものである（他人のためにだけでなく，自分のためでもある！コンピュータのプログラムは，書いた本人でさえ，しばらくすれば，忘れてしまうものである）．コンピュータ，より正確にいうと，BASICのインタープリタ（BASIC言語で書かれたプログラムを機械に通訳する基本ソフト）は，REM で始まる行を，読み飛ばす．

ひとこと

70〜80行は，下のように1行にまとめることができる．

```
INPUT "1から始まる奇数の和を計算します．何個の奇数を加えますか？", N
```

10 20 30 40 50 60	単なるリマーク文(コンピュータは読み飛ばす.)
70	
80	キー・ボードから入力される値を変数 N に格納
90 100 110	計算のメイン・ルーチン(主要部)
120	1行改行する(画面で1行あける)ためのコマンド
130	結果の表示

たとえば，80行目の実行で，N として4が入力されると，90行目から110行目が，4回繰り返され，5回目に90行目に行ったとき，繰り返しのループから脱出する.

	S=0	
1回目	I=1	
	S=0+1=1	
2回目	I=2	
	S=1+3=4	
3回目	I=3	
	S=4+5=9	
4回目	I=4	
	S=9+7=16	
5回目	I=5	――→　ここでループを脱出

□ プログラム例2 自然数列の和を求めるための“実験”

```
10 REM --------------------------------------------------------
20 REM 数の和の規則
30 REM  1+2+3+....+N の値   n^2との比較
40 REM --------------------------------------------------------
50 PRINT "１から与えられた数までの自然数の和を計算します．"
60 INPUT "いくつまで加えますか？",N
70 FOR I=1 TO N
80 S=S+I
90 NEXT I
100 PRINT
110 PRINT "はい、";N;"までの和は";S;"です．"
120 RATIO=S/N^2
130 PRINT:PRINT"SとN^2との比は";RATIO;"です．"
140 PRINT:PRINT"この結果を利用して、Sを表す式を予想します．"
150 PRINT"Sを(1/m)*N^2でうまく近似してみましょう．"
160 INPUT"mの値として何を予想しますか？",M
170 DIF=S-N^2/M
180 PRINT"SとN^2/mとの誤差は、"; DIF;"です．"
```

このプログラムを実行すると，

$$1+2+3+\cdots\cdots+n$$

と n^2 との比が，n が比較的大きいときは，ほぼ $\frac{1}{2}$ に等しいことがわかる．そこで

$$(1+2+3+\cdots\cdots+n)-\frac{1}{2}n^2$$

を計算してでてくる値をいろいろ試していると

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n^2+\boxed{}$$

の□にあてはまるものが予想できるはずである．

10	リマーク文
20	
30	
40	
50	N の値の入力
60	
70	1+2+3+……+N を計算するメイン・ルーチン
80	
90	
100	結果の出力
110	
120	(1+2+3+……+N)／N^2 の値を変数 RATIO に格納
130	
140	
150	
160	
170	(1+2+3+……+N)$-\frac{1}{m}N^2$ の値を変数 DIF に格納し，それを出力する
180	

ひとこと

コンピュータの良いところは，どんな単調の仕事でも，あきずに(?)黙々とこなしてくれることである．たとえば

$$1+2+3+4+5+6+7+8+\cdots\cdots+100000$$

のような計算を左のプログラムで実行するには，約10万回の足し算が必要だが，コンピュータはあっという間に，こなしてしまう．

このようなコンピュータの「従順さ」をうまく活用する方法の1つに，ここでやっているような，**数値実験** がある．人間には，馬鹿々々しくてやっていられない膨大な計算を実際にやってみることで，未知の法則を発見する手がかりがときに得られるのである．コンピュータの発達と普及により，数学でも，実験が身近なものになった．

□ プログラム例3 連続2整数の積の和

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)$$

についても，エレガントな性質がある．

```
10 REM ------------------------------------------------
20 REM  数の和の規則
30 REM  1*2+2*3+3*4+....+N^(N+1) の値
40 REM              N(N+1)(N+2)との比較
50 REM ------------------------------------------------
60 PRINT "連続する整数の積の和を計算します."
70 INPUT "1*2から初めて何個までの和を計算しますか？",N
80 FOR I=1 TO N
90 S=S+I*(I+1)
100 NEXT I
110 PRINT
120 PRINT N;"個の連続2整数の積の和は";S;"です."
130 RATIO=N*(N+1)*(N+2)/S
140 PRINT"n(n+1)(n+2)とSとの比は";RATIO;"です."
```

プログラム例1で見たように

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n \text{ は } \frac{1}{2}n(n+1)$$

つまり，最後に加えた数とその次の数の積の $\frac{1}{2}$ になった．今度は連続2整数の積

$$1\times2=2,\quad 2\times3=6,\quad 3\times4=12,\quad 4\times5=20,\ \cdots\cdots$$

の和を考えようとしている．

$$2+6=8$$
$$2+6+12=20$$
$$2+6+12+20=40$$
$$\vdots$$

これを，連続3整数の積 N(N＋1)(N＋2) と比較しようというのである．

行番号	内容
10 20 30 40 50	リマーク文
60 70 80	S＝1×2＋2×3＋3×4＋……＋N(N＋1) の計算のメイン・ルーチン
90	
100	
110 120	結果表示
130 140	N(N＋1)(N＋2)　との比較

ⓗⓣⓒⓣ（ひとこと）

90行目　I＊(I＋1)　は，I　と　I＋1　との積を表す．これを初心者は，ついうっかりして

I(I＋1)

と書いてしまう！　BASIC は，「×は省く」という初等代数学のルールをマスターしていない?! ことを忘れてはならない．

□ プログラム例4　平方数列の和を求めるための実験

次は，平方数列の和

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

に関するものである。

```
10 REM -------------------------------------------------------
20 REM 数の和の規則
30 REM  1^2+2^2+3^2+....+N^2 の値    n^3との比較
40 REM -------------------------------------------------------
50 PRINT "与えられた数までの自然数の平方の和を計算します．"
60 INPUT "1から始めていくつの平方まで計算しますか？",N
70 FOR I=1 TO N
80 S=S+I^2
90 NEXT I
100 PRINT
110 PRINT "はい、";N;"までの平方の和は";S;"です．"
120 RATIO=S/N^3
130 PRINT"SとN^3との比は";RATIO;"です．"
140 PRINT:PRINT "Sと(1/m)*N^3との差を求めます．"
150 INPUT "mの値を何にしましょうか?",M
160 DIF=S-N^3/M
170 PRINT "誤差は";DIF;"です"
```

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+N^2$$

を表す式を予想することは，少し難しい。

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+N^2}{N^3}$$

の比をとると，この値は，N によって一定ではないが，N の値を大きくしていくと，ある値に接近していくことが見える。これを利用して，まず

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+N^2 \text{ の近似値}$$

を作り，つづいて誤差を求める。

行番号	内容
10	リマーク文
20	
30	
40	
50	
60	
70	$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+N^2$ を計算するメイン・ルーチン
80	
90	
100	
110	
120	$(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+N^2)/N^3$ の比の値を RATIO に格納して出力
130	
140	
150	
160	
170	

注意 BASIC では，累乗を表すのに，記号∧を利用する．

研究 このプログラムをわずかに修正して

$$S=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+N^3$$

や

$$S=1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots\cdots+N(N+1)(N+2)$$

を計算するプログラムを作るのは，たやすい．

余力があれば

$$S=4\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{N+1}}{2N-1}\right\}$$

を計算するプログラムを書き，N をできる限り大きくして実行してみよ．

□ プログラム例5　**非規則的な数の和と平均**

規則的な数でなくても，和を求めることはできる．

次のプログラムは，たとえば1クラスの生徒の平均点を求めることなどに利用できる．

```
10 REM ---------------------------------------------------
20 REM 数値データの分析
30 REM 平均値を求める
40 REM ---------------------------------------------------
50 S=0
60 INPUT "何個のデータを入力しますか？",N
70 FOR I=1 TO N
80 PRINT I;"番目のデータを入力してください．"
90 INPUT X
100 S=S+X
110 NEXT I
120 MEAN=S/N
130 PRINT
140 PRINT N;"個のデータの総和は、";S;"です．"
150 PRINT "これらの平均は";MEAN;"です．"
```

「何個のデータを入力しますか」の質問に答えて，たとえば10を入力すると，

「70行目〜110行目」

が，I=1，I=2，I=3，……，I=10 について10回実行され，(11回目に入ったところで，ループから脱出する)，その間に入力された10個分のデータの和が，S に格納される．

この S の値を，データ数 N で割れば，平均が出る．

10 20 30 40	リマーク文
50	S の初期化(初期値として 0 を格納する)
60	データの個数
70 80 90 100 110	メイン・ルーチン データ入力 新しく入力されたデータの値を S に加え，それを始めて S の値とする.
120	平均を求める.
130 140 150	結果出力

研究　「配列変数」を使うと，もっと見やすいプログラムが書ける.

「配列変数」とは，数学でいう有限数列のことで，

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ x_n$$

と数字で書くところを，まず

DIM　X(N)

と「宣言」しておいて(N はその前に値が決まっているものとする)

X(1)，X(2)，………，X(N)

と表すのである．具体例については，☞ p.206

□ プログラム例6　関数の定義

```
10 REM ------------------
20 REM      数列の和
30 REM ------------------
40 DEF FNA(N)=2*N-1
50 REM 数列AnをBASICの関数として定義する。
60 REM ここでは、a(N)=2*N-1 としている。
70 PRINT"数列の和を計算します。"
80 INPUT "数列の項数を入力してください。",N
90 FOR I=1 TO N
100 S=S+FNA(I)
110 NEXT I
120 PRINT S
```

$1+2+3+\cdots\cdots+n$ や $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+n(n+1)$

のような規則的な数の列の和は，それぞれ

$$a(n)=n,\quad a(n)=n(n+1)$$

などと，関数 $a(n)$ を定義しておけば，いつでも

$$a(1)+a(2)+a(3)+\cdots\cdots+a(n)$$

と表すことができる．

BASIC では関数を定義するのに

```
40 DEF FNA(N)=2*N-1
```

のようにする．DEF は，define (定義する)，FN は function (関数) に由来する．

40行目を，いろいろに，たとえば

```
DEF FNA(N)=N
DEF FNA(N)=N*(N+1)
DEF FNA(N)=1/(N*(N+1))
```

などいろいろに変更してみよ．

II.　最大公約数を探す

与えられた2数 a, b の最大公約数を見つけるには，

2数 a, b の素因数分解

がみつかればよいが，後に述べるように，a, b の値が大きくなってくると，コンピュータを用いても，素因数分解は難しくなる．これに対し，以下に述べるのは，**ユークリッドの互除法**と呼ばれるどんなに大きな2数に対しても，その最大公約数を見つけることのできる極めて効率の良い方法である．

まず基本原理は，

整数 a, b, q, r の間に

$$a=bq+r \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

という関係があるときは

（a と b の最大公約数）=（b と r の最大公約数）

である．実際，（$*$）が成り立っているとき

d が　a と b の公約数 $\Longrightarrow$ d は r の約数

$\Longrightarrow$ d は b と r の公約数

d が　b と r の公約数 $\Longrightarrow$ d は a の約数

d は a と b の公約数

だからである．

それゆえ，2数 a, b が与えられたとき，a と b で割って余り r を求めると a と b の最大公約数を求めるかわりに，b と r の最大公約数を求めればよいことになる．たとえば

$$a=128 \qquad b=36$$

のときは

$$128=36\times3+20$$

となるので，（128 と 36 の最大公約数）=（36 と 20 の公約数）となる．

以下同様にして，考えるべき2数をどんどん小さくしていけば，いずれ余りとして0が出る（つまり割り切れる）ことになる．このとき最後の除数が求める最大公約数である．

$$36=20\times1+16$$

$$20=16\times1+4$$

$$16=4\times4+0 \quad \longleftarrow \quad \text{最後の除数は } 4\,!!$$

□ プログラム例7

```
10 '*************************************************
20 '*  ユークリッドの互除法                           *
30 '*与えられた二数の最大公約数を見つけるアルゴリズム*
40 '*************************************************
50 *NYUURYOKU  REM データの入力
60 PRINT "二つの正の整数を入力してください. "
70 INPUT "a=",A
80 INPUT "b=",B
90 IF A<=0 OR B<=0 GOTO *NYUURYOKU
100 IF A<>INT(A) OR B<>INT(B) GOTO *NYUURYOKU
110 PRINT "a=";A;"b=";B;"ですね. これでいいですか? "
120 INPUT "Y(=yes)/N(=no)",J$
130 IF J$="n" OR J$="N" GOTO *NYUURYOKU
140 '二数のうち大きい方をα、小さい方をβとおく
150 IF A>=B GOTO 170
160 ALPHA=B:BETA=A:GOTO *GOJOHO
170 ALPHA=A:BETA=B
180 '以下ユークリッドの互除法
190 *GOJOHO
200 QUOTIENT=INT(ALPHA/BETA)
210 GAMMA=ALPHA-BETA*QUOTIENT
220 PRINT ALPHA;"=";BETA;"x";QUOTIENT;"+";GAMMA
230 IF GAMMA=0 GOTO *SHUURYO
240 ALPHA=BETA:BETA=GAMMA
250 GOTO *GOJOHO
260 *SHUURYO REM 計算終了
270 GCM=BETA
280 PRINT "aとbの最大公約数は";GCM;"です. "
290 IF GCM>1 GOTO *OSHIMAI
300 PRINT "つまり、aとbは互いに素です. "
310 *OSHIMAI
320 END
```

研究　このプログラムでは，a，b にあまり大きな値を指定することはできない，ためしに

$a=111111111$
$b=111111$　　としてみよ．

10 ⋮ 40	リマーク文（REM）の代わりに，’（アポストロフィー）が使える．
50	この行に `*NYUURYOKU` という名前（ラベル）がつけられる．すると以後“`GOTO 50`”のかわりに“`GOTO *NYUURYOKU`”と表現できるので，わかり易い．
60 70 80	A，B の値の入力
90	A≦0 または B≦0 だったら入力やりなおし．
100	A，B が整数でなかったら，入力やりなおし．
110 120 130	入力結果の確認
140	リマーク文は，途中でも使える．
150 160 170	2 数 A，B のうち大きい方を ALPHA，小さい方を BETA とおく
180	リマーク文
190	この行に，`*GOJOHO`　とラベルがつく
200 210 220	正の整数α，$\beta(\alpha \geqq \beta)$に対し $\alpha=\beta\times q+\gamma \qquad (0 \leqq \gamma \leqq \beta)$ となる 2 数 q，r を求める．（INT については，次頁を見よ．）
230	
240 250	$\gamma \neq 0$ なら，β と γ を，新しい α，β として，200 行～220 行を繰り返す．
260	
270	
280	
290 300	「互いに素」の場合は，特別のメッセージを追加する．
310	
320	処理を終了するための命令（必須ではない．）

注　160 行目などで使われている“：”（コロン）は本来 2 行以上に分けて書くべきものを 1 行にまとめて表すための記号である．

Ⅲ. 素　数

素数とは，1と自分自身のほかに約数のない数である．この定義に基づいて，非常に大きい数が素数であるか否かを判定することは困難だが，比較的小さい数の範囲なら，パソコンで素数をリスト・アップすることができる．

2を除くと素数はすべて奇数なので，奇数の中で素数を探すのが能率的である．

判定すべき奇数 A に対し，A 未満の奇数

$$I=3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots\cdots,\ A-2$$

で A を割って (A/I)，その整数部分を求め (INT(A/I)) それに I をかける (INT(A/I)＊I) と，A 以下で I で整除できる最大数が出る．A 自身が I で整除できるときには，これが A に等しくなる．このようなことが1回でも起きたときは，A は素数でない，1回も起きないときは，A は素数であると判定される．

この原理に基づいて，3以上の素数を順に見つけていくプログラムが次のものである．このプログラムは STOP キーで強制的に中断しないと，永遠に (エラーが出るまで) 続行される．

プログラム例8

```
10 CLS
20 PRINT "３以上の素数（奇素数）を順に表示します。"
30 A=3:N=1
40 '-----------------------------------------------------
50 '      素数判定ルーチン
60 FOR I=3 TO A-1 STEP 2
70 IF INT(A/I)*I=A THEN A=A+2:GOTO 60
80 NEXT
90 '-----------------------------------------------------
100 PRINT N"個目の奇素数";A
110 A=A+2:N=N+1:GOTO 60
```

左のページのプログラムのポイントは

```
70 IF INT(A/I)*I=A THEH A=A+2:GOTO 60
```

つまり，

　Aが I が割り切れたら，A に 2 を加えたものを改めてAとおいて，
　FOR～NEXT ループから脱出せよ．

という命令にある．(80 行目の NEXT を通過すると，I の値を 1 増やして 60 行目に戻る(つまり FOR～NEXT ループの中にとどまる)が，GOTO 60 で 80 行目を飛ばすと，一旦，FOR～NEXT ループから脱出し，新しいAの値に対して FOR～NEXT ループを始めることになる.)

[注]　30 行目，70 行目，110 行目の：(コロン)は，すでに数回使ってきたように，2 行に分けて書くべき命令を都合により 1 行にまとめて書くときに使うものである．

10	画面の文字を消去 (Clear Screen)
20	
30	Aの初期値＝3，Nの初期値＝1
40	リマーク文
50	
60	素数判定ルーチン
70	
80	
90	リマーク文
100	
110	Aに 2 を加えた数をあらためてAとして，繰り返す．

□ プログラム例9

```
10 '****************************************************
20 '与えられた数以下の素数をすべて探しファイルに出力する。
30 '****************************************************
40 DIM S(10000):S(1)=2:COUNT=1
50 INPUT "いくつ以下の範囲で素数を探しますか？",LIMIT
60 PRINT"大きな数が指定されたときは少し時間がかかります。"
70 '----  素数リスト作成ルーチン  ----------------------
80 FOR N=3 TO LIMIT STEP 2
90     FOR J=3 TO N-1 STEP 2
100            IF INT(N/J)*J=N THEN 130
110      NEXT J
120      COUNT=COUNT+1:S(COUNT)=N
130 NEXT N
140 '----  素数リスト表示     ---------------------------
150 FOR I=1 TO COUNT
160      PRINT USING "#### ";S(I);
170 NEXT
180 PRINT:PRINT
190 PRINT USING "##### までに素数は ";LIMIT
200 PRINT USING "          ##### 個在ります。";COUNT
210 '----  ファイル出力（まずファイル名入力）-------------
220 INPUT "ファイルに保存しますか ?  (Y/N)",I$
230 IF I$="N" OR I$="n" THEN 350
240 IF I$="Y" OR I$="y" THEN 250 ELSE 220
250 INPUT "DRIVE (for example, A)=";D$
260 INPUT "FILE NAME (for example SOSUU)=";F$
270 INPUT "TYPE NAME (for example DAT)  =";T$
280 OPEN D$+":"+F$+"."+T$ FOR OUTPUT AS #1
290 PRINT #1,LIMIT
300 PRINT #1,COUNT
310 FOR I=1 TO COUNT
320      PRINT #1,S(I)
330 NEXT
340 CLOSE
350 PRINT "終了！"
360 END
```

10
20
30
40　素数を小さい順に格納するための変数
50　　S(1), S(2), ……, S(10000)
60　を準備する．2 は，素数の中で唯一の偶数であるから特別扱
70　いして，はじめから S(1)=2 としておく．
80　N=3 としてスタート
90～110　N が，N 未満の奇数で割り切れることがあるか否かの判定ルーチン
120　N が素数と判定されたら，COUNT 番目の S の値，つまり
130　S (COUNT) にその値を格納
140
150
160　これは，素数を 4 桁表示に統一して表示するための命令
170
180
190
200
210
220
230
240
250～270　ファイル名を，ドライブ名，ファイル名(半角英数字 8 文字以内)，拡張子(半角英数字 3 文字以内)の順に入力(よくわからなければ SOSUU. DAT とすればよい.)
280　書き込み用にファイルを用意
290～340　ファイルへの書き込み
350
360

□ プログラム 例10

```
10 '        素因数分解
20 ON ERROR GOTO 330
30 PRINT"初めに素数のリストSOSUU.DATを読み込みます。"
40 'SOSUU.DAT がない場合には、それをまず作って下さい。
50 OPEN "SOSUU.DAT" FOR INPUT AS #1
60 INPUT #1,LIMIT,NUMBER:DIM PRIME(NUMBER)
70 FOR I=1 TO NUMBER:INPUT #1,PRIME(I):NEXT
80 CLOSE
90 PRINT:PRINT:PRINT
100 INPUT "素因数分解したい整数を入力して下さい ";X
110 PRINT:PRINT "只今計算中・・・・・・・・"
120 DIM POW(NUMBER):K=1:XX=X
130 IF X>LIMIT THEN 290
140 Q=INT(XX/PRIME(K)):R=XX-Q*PRIME(K)
150 IF R=0 THEN XX=XX/PRIME(K):POW(K)=POW(K)+1 ELSE K=K+1
160 IF XX>=PRIME(K) THEN 140
170 K=K+1
180 BUNKAI$="":L=0:DIM FACTR$(K):FOR I=0 TO K:FACTR$(I)="":NEXT
190 I=0
200 IF NOT POW(I)=0 THEN ELSE I=I+1:IF I<K THEN 200 ELSE 240
210 S$=STR$(PRIME(I)):POWS$=STR$(POW(I))
220 FACTR$(L)=RIGHT$(S$,LEN(S$)-1)+"^"+RIGHT$(POWS$,LEN(POWS$)-1)
230 L=L+1:I=I+1:IF I<K THEN 200
240 FOR I=0 TO L:BUNKAI$=BUNKAI$+FACTR$(I)+" x ":NEXT
250 BUNKAI$=LEFT$(BUNKAI$,LEN(BUNKAI$)-6)
260 PRINT:PRINT "できました!":PRINT:PRINT X;" = ";BUNKAI$
270 ERASE POW,FACTR$
280 PRINT:PRINT:GOTO 100
290 PRINT "登録されている最大素数は";PRIME(NUMBER);"です。"
300 PRINT "これより大きな素因数があるときには正しく分解できません。"
310 INPUT "一応実行してみますか? Y(es)/N(o)?",J$
320 IF J$="n" OR J$="N" GOTO 100 ELSE 140
330 BEEP:PRINT:PRINT:PRINT "エラーが発生しました。"
340 PRINT "入力した数が大きすぎるか、SOSUU.DATがありません。"
350 PRINT"終了します":END
```

10	
20	エラーがあったら，メッセージを表示して処理を終了する．
30	
40	
50	
60	素数の小さい順に列挙したファイル SOSUU. DAT を読む．これには最初に，リストの上限とリスト・アップされている素数の個数が書かれている．
70	
80	
90	
100	
110	
120	
130	
140	初め，K=1 として，K 番目の素数で，与えられた整数を割り切れるだけ割る．何回割り切れたかは，POW (K) という変数に記憶される．
150	
160	
170	
180	素因数分解の結果を文字列として表現するための変数．FACTR＄ を用意している．
190	
200	
210	
220	
230	
240	
250	入力された整数Xの，素因数分解表示 BUNKAI を作る．
260	
270	次の計算のための準備
280	始めに戻る．
290	大きい数が入力されたときのリスクを警告
300	
310	「強行」の指示があれば，やってみる．
320	
330	
340	
350	

IV. 関数のグラフ

パソコンを利用することの最大の長所は，画面に図を描かせること(グラフィクス)であるが，残念なことにBASICは，グラフィクス関係の命令に関し，多くの〈方言〉があって統一がとれていない．

それ以上に残念なのは，指導要領の関係からグラフィクス関係については，数学Aではまったくほとんど扱われていないことである．

本書では，パソコンにおけるグラフィクスの重要性に鑑み，わが国で最も普及してきた NEC 製 PC 9801 シリーズ用の N88BASIC で実行できる，2次関数のグラフのプログラムを以下に載せる．他社製のパソコンでも，ほとんどそのままか，わずかな修正で動くはずである．

ここで使われているグラフィクス関係の命令は，次の2つだけである．

LINE …… 指定された2点を両端とする線分を描く

例　`LINE(-5, 0)-(5, 0)`

PSET …… 指定された座標に1点を表示する

例　`PSET(50, 70)`

曲線のグラフは，定義域に属するxの値をほんのわずか(XWIDTH)ずつずらしながら対応するyの値を求め，こうして定まる$(x,\ y)$を1個ずつ表示する，という(人間にとっては気の遠くなるような，退屈な)作業の反復(DOTS＝2000回の反復！)によって描かれている．

□ **プログラム 例11**

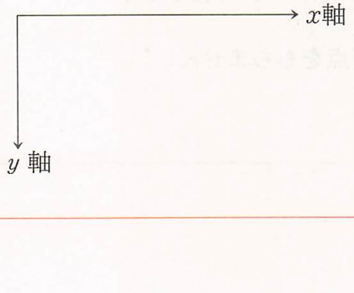
```
10 REM ----------------------------------------
20 REM グラフ
30 REM ----------------------------------------
40 PRINT "放物線のグラフを-10<x<10,-10<y<10の範囲で描きます."
50 PRINT "y=ax^2 + bx + c の係数a,b,cを順に入力してください."
60 INPUT "a=",A
70 INPUT "b=",B
80 INPUT "c=",C
90 INPUT "xの変域の最小値は",XMIN
100 INPUT "xの変域の最大値は",XMAX
110 LINE(-5,0)-(5,0)
120 LINE(0,-10)-(0,10)
130 XWIDTH=(XMAX-XMIN)/2000
140 FOR I=1 TO 1000
150 X=XMIN+XWIDTH*I
160 Y=A*X^2+B*X+C
170 PSET(X,-Y)
180 NEXT I
```

110　行は x 軸，120 行は，y 軸の表示

130　行では，x の変域の幅(最大値－最小値)を 2000 等分した値を XWIDTH を定める．

140～180　行が，グラフを描くためのメイン・ルーチン

170　行目で PSET (X, －Y) となっているのは BASIC での座標が下図のように縦軸の方向が，数学の習慣と反対のため．



□ プログラム例12

```
10 REM -----------------------------------------
20 REM グラフ
30 REM -----------------------------------------
40 CLS 3:SCREEN 3:WINDOW(-10,-12)-(10,12)
50 PRINT "放物線のグラフを-10<x<10,-10<y<10の範囲で描きます."
60 PRINT "y=ax^2 + bx + c の係数a,b,cを順に入力してください."
70 INPUT "a=",A
80 INPUT "b=",B
90 INPUT "c=",C
100 INPUT "xの変域の最小値は?",XMIN
110 INPUT "xの変域の最大値は?",XMAX
120 LINE(-15,0)-(15,0)
130 LINE(0,-15)-(0,15)
140 DOTS=2000
150 XWIDTH=(XMAX-XMIN)/DOTS
160 FOR I=1 TO DOTS
170 X=XMIN+XWIDTH*I
180 Y=A*X^2+B*X+C
190 PSET(X,-Y)
200 NEXT I
210 D=B^2-4*A*C
220 IF D<0 GOTO 310
230 IF D=0 GOTO 290
240 ROOTD=SQR(D)
250 X1=(B-ROOTD)/(2*A):X2=(B+ROOTD)/(2*A)
260 PRINT "x軸と異なる2交点をもちます."
270 PRINT "それらの座標は";X1;"と";X2;"です."
280 GOTO 330
290 PRINT "x軸と、x=";B/(2*A);"で接します."
300 GOTO 330
310 PRINT "x軸とは共有点をもちません."
320 GOTO 330
330 END
```

10
20
30
40　CLS 3 は，グラフィック画面の初期化
50　WINDOW は，グラフィック画面の範囲を定義
60
70
80
90
100
110
120
130
140　DOT＝2000 の右辺を変換すれば，グラフの精細度を任意
150　に変更できる。
160
170
180
190
200
210　判別式 D
220　D＜0 のときは，実数解なし
230　D＝0 のときは重解
240　ROOTD は $\sqrt{B^2-4AC}$ の値
250　X1，X2 は，$AX^2+BX+C=0$ の 2 つの解
260
270
280
290
300
310
320
330

□ プログラム 例13

```
10 REM ２次関数のグラフの移動
20 CLS 3:PRINT "２次関数のグラフの変化を描きます．"
30 INPUT "xの変域の最小値を入力してください．",XMIN
40 INPUT "xの変域の最大値を入力してください．",XMAX
50 DOTS=2000
60 XWIDTH=XMAX-XMIN:XPITCH=XWIDTH/DOTS
70 WINDOW (XMIN-5,-XWIDTH*.6)-(XMAX+4,XWIDTH*.5)
80 LINE(XMIN-5,0)-(XMAX+5,0)
90 LINE(0,-XWIDTH)-(0,XWIDTH)
100 PRINT "y=a*x^2 + b*x + c の係数a,b,cの初期値を"
110 PRINT "順に入力してください．"
120 INPUT "a=",A
130 INPUT "b=",B
140 INPUT "c=",C
150 INPUT "a,b,cのうち、どれを変化させますか？",WHICH$
160 IF WHICH$="a" GOTO 190
170 IF WHICH$="b" GOTO 200
180 IF WHICH$="c" GOTO 210
190 INPUT "どれくらいずつ変化させますか?",AINC:GOTO 220
200 INPUT "どれくらいずつ変化させますか?",BINC:GOTO 220
210 INPUT "どれくらいずつ変化させますか?",CINC
220 INPUT "何個描きますか？",HANPUKU
230 FOR J=1 TO HANPUKU
240     PRINT "a=";A;"b=";B;"c=";C
250     FOR I=1 TO DOTS
260          X=XMIN+XPITCH*I
270          Y=A*X^2+B*X+C
280          PSET(X,-Y)
290     NEXT I
300     IF WHICH$="a" GOTO 330
310     IF WHICH$="b" GOTO 340
320     IF WHICH$="c" GOTO 350
330     A=A+AINC:GOTO 360
340     B=B+BINC:GOTO 360
350     C=C+CINC:GOTO 360
360 NEXT J
```

10		
20		
30		
40		
50		
60		
70	WINDOW を，X の変域に応じて設定	
80	x 軸	
90	y 軸	
100		
110		
120		
130		
140		
150		
160	`IF WHICH$="a" OR WHICH$="A"` のように，小文字，	
170	大文字の違いをユーザが気にしなくてよいようにすると，	
180	より親切	
190		
200	増分 (increment) を指定	
210		
220		
230		
240		
250		
260	1組の a，b，c の値に対し	a，b，c の値を変更して
270	$y=ax^2+b^2+c$	250〜290
280	のグラフを表示	を反復
290		
300		
310		
320		
330		
340		
350		
360		

Repos

「1÷3×3≒1　!?」

電卓で順に [1], [÷], [3], [×], [3], [=] というキーを押すと，表示窓に [0.999999] のような結果が出て，正しい答である [1] が出ないことがある．これは，電卓が 1÷3 を計算し終えた段階で，無限小数であるべきこの値を0.333333 と有限小数に“丸めて”しまうためである．

電卓が用いるのは，所詮有限個の記憶装置に過ぎないので無限小数それ自身を処理することはできないから，これは，電卓を利用した計算の本質的制約といわなければならない．

ところで最近の電卓の中には，表示されないもう 1 桁分の記憶を装置の中にもっていて，それを四捨五入することによって，表題のような間違いを回避する機能をもっているものもある．

[0.333333] 3 ──3 をかける──→ 0.9999999 ──────→ [1]

（[0.333333]：表示部分）
（0.9999999 の最後の 9 ↑：ここを四捨五入）

しかし，これは，見かけ上の回避策にすぎず，かえって，電卓やパソコンによる数値計算の理論的制約から，ユーザの目をそらすものである．



§5　発展問題

本セクションでは，内容が数学Aのいくつかの単元にまたがる問題，あるいは，各単元の深い理解と粘り強い思考が要求される問題を扱う．独力で解決できなくとも，解答を熟読してしっかり理解できれば，著者達の意図は達成される．難解であれば，初読の際は読みとばす手もあろう．



B.501

ある整式 $f(x)$ において，

$$f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

が恒等的に成り立つという．

(1)　$f(0)=f(1)=f(2)=0$ であることを示せ．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

アプローチ　$(*)$ が恒等的に成立するということは，x にどんな値を代入しても成立する，ということです．

解答　(1)　$(*)$ で，$x=0,\ 1,\ -1$ とおくと，

$$f(0)=0,\ f(1)=f(2),\ f(1)=-f(0)$$

$$\therefore\quad f(0)=f(1)=f(2)=0$$

が得られる．■

(2)　$f(x)$ が，異なる3つの値に対して0となるが，恒等的に0ではないので，$f(x)$ は3次以上の整式である．

▶ $f(x)$ は $x(x-1)(x-2)$ を因数にもつ．

そこで，$f(x)$ を n 次式 $(n \geqq 3)$ とすると，$(*)$ の左辺は $2n$ 次式，また $x^3f(x+1)$ が $n+3$ 次式であることより，$(*)$ の右辺は $n+3$ 次式となる．

▶ $n+3 \geqq 6 > 4$

よって，$(*)$ の両辺の次数を比較することにより，

$$2n=n+3 \qquad \therefore\quad n=3$$

▶ $f(x)$ が3次式であることが分かった．

となる．したがって，(1)を考慮し，

$$f(x)=ax(x-1)(x-2) \qquad (a\text{ は定数})$$

とおける．すると，

▶ これより，$\begin{cases} f(3)=6a \\ f(4)=24a \end{cases}$ となるので，$(*)$ で $x=2$ とおいて得られる等式 $f(4)=8f(3)-24$ から $a=1$ を導くこともできるが，必要条件に過ぎない．

$$f(x^2)=ax^2(x^2-1)(x^2-2)$$
$$=ax^6-3ax^4+2ax^2$$
$$x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$$
$$=x^3\cdot a(x+1)x(x-1)-2x^4+2x^2$$
$$=ax^6-(a+2)x^4+2x^2$$

となるので，$(*)$ が恒等的に成立することより，

$$\begin{cases} -3a=-(a+2) \\ 2a=2 \end{cases} \qquad \therefore\quad a=1$$

が得られる．

ゆえに，求める整式 $f(x)$ は

$$f(x)=\boldsymbol{x(x-1)(x-2)}$$

である．

B. 502

(1)　$f(x)$ を整式とする．
任意の x について，$f(x+1)=f(x)$ が成り立つための条件は，$f(x)$ が定数であることを示せ．

(2)　任意の x について，$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=0$ …(＊) を満たす整式 $f(x)$ を求めよ．

解答　**(1)**　$f(x)$ を n 次 $(n\geqq 1)$ の整式とし，最高次の係数を a $(a\neq 0)$ とおくと，一般に

$$(x+1)^k-x^k$$
$$=\left(x^k+kx^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2}x^{k-2}+\cdots\cdots+kx+1\right)-x^k$$
$$=kx^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2}x^{k-2}+\cdots\cdots+kx+1$$

となることから，$f(x+1)-f(x)$ は $n-1$ 次の整式で，最高次の係数は na である．　……(＊＊)

よって，恒等的に $f(x+1)-f(x)=0$ となることはない．したがって，$f(x)$ は定数でなくてはならない．　◀必要条件

逆に，$f(x)$ が定数であるならば，

$$f(x+1)-f(x)=0$$

が恒等的に成立するのは明らかである．■　◀十分性のチェック

(2)　(＊)は，$f(x+1)-f(x)=f(x)-f(x-1)$ と変形され，$F(x)=f(x)-f(x-1)$ とおくと，

$$F(x+1)=F(x)$$

となる．よって，(1)より，$F(x)$ つまり，

$$f(x+1)-f(x)\ は定数である．$$

そこで，(1)と同様な考察(＊＊)により，(＊)が成り立つためには，$f(x)$ の次数 n が $n\leqq 1$ つまり，

$$f(x)=ax+b$$

でなければならない．

逆に，このとき，(＊)が恒等的に成立することは代入することにより確められる．　◀各自代入せよ．

以上より，求める整式 $f(x)$ は

$$f(x)=\boldsymbol{ax+b}\quad(a,\ b\ は任意の実数)$$

である．

B.503

任意の整式 $g(x)$ に対し，つねに

$$f(g(x))=g(f(x)) \qquad \cdots\cdots\cdots (*)$$

が成り立つような1次以下の整式 $f(x)$ を求めよ．

アプローチ 任意の整式 $g(x)$ に対し，$(*)$ が成り立つならば特定の整式 $g(x)$ に対しても，$(*)$ が成り立つはずです．そこで $g(x)$ として何か，典型的なものを選んでみます．

1次以下の整式 $f(x)$ は $ax+b$ とおける．▶

解答 $f(x)=ax+b$ とおくと，$(*)$ は，

$$ag(x)+b=g(ax+b) \qquad \cdots\cdots\cdots (**)$$

となる．

$g(x)$ の与え方は自由！▶

そこで，$g(x)=x^2$ とおくと，$(**)$ は

$$ax^2+b=(ax+b)^2$$

$$\therefore \quad ax^2+b=a^2x^2+2abx+b^2$$

となり，これが恒等的に成立することより，

$$\begin{cases} a=a^2 \\ 0=2ab \\ b=b^2 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a(a-1)=0 \\ ab=0 \\ b(b-1)=0 \end{cases}$$

よって，

任意の整式 $g(x)$ について $(*)$ が成り立つための必要条件．▶

$$\text{(i)} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \quad \text{(ii)} \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \text{(iii)} \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

が得られる．

ところで，(i)，(ii)の場合，それぞれ

$$\begin{cases} f(g(x))=1 \\ g(f(x))=g(1), \end{cases} \quad \begin{cases} f(g(x))=0 \\ g(f(x))=g(0) \end{cases}$$

となるので，任意の整式 $g(x)$ について $(*)$ が成り立つことはない．

また，(iii)の場合，つまり，$f(x)=x$ のとき，$(*)$ は，

$$g(x)=g(x)$$

(iii)が十分でもあることを示した．▶

となり，任意の整式 $g(x)$ について成り立つ．

ゆえに，求める整式 $f(x)$ は

$$f(x)=x$$

結論はくだらない！▶

である．

B.504

$$(x^2+2x-3)P(x)-(x^2-x-2)Q(x)=1 \quad \cdots\cdots\cdots \quad ①$$

をみたす整式 $P(x)$，$Q(x)$ を考える．

(1)　①を満たす1次式 $P(x)$，$Q(x)$ を求めよ．

(2)　(1)を利用して①を満たす2次式 $P(x)$，$Q(x)$ をすべて求めよ．

アプローチ　(1)の方は，$P(x)=ax+b$，$Q(x)=cx+d$ とおいて，係数 a，b，c，d を定めればよい(未定係数法)でしょう．(2)も，この方針で解くこともできますが，(1)を利用すると，はるかに簡単です．

解答　(1)　$P(x)=ax+b$，

$Q(x)=cx+d$

とおき，これらを①に代入すると，

$$(x^2+2x-3)(ax+b)-(x^2-x-2)(cx+d)=1$$

$$\therefore \quad (a-c)x^3+(2a+b+c-d)x^2 +(-3a+2b+2c+d)x+(-3b+2d)=1$$

となる．

これが x について恒等的に成立すべきであることより，条件

$$\begin{cases} a-c=0 \\ 2a+b+c-d=0 \\ -3a+2b+2c+d=0 \\ -3b+2d=1 \end{cases}$$

を得る．

この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} a=\dfrac{3}{20},\ b=-\dfrac{1}{10} \\ c=\dfrac{3}{20},\ d=\dfrac{7}{20} \end{cases}$$

となる．

したがって，

$$\boldsymbol{P(x)=\frac{3}{20}x-\frac{1}{10},\quad Q(x)=\frac{3}{20}x+\frac{7}{20}.}$$

(2) (1)で求めた1次式 $P(x)$, $Q(x)$ をそれぞれ $p_0(x)$, $q_0(x)$ とすると，

$$(x^2+2x-3)p_0(x)-(x^2-x-2)q_0(x)=1 \quad \cdots\cdots ②$$

が成立する．

ゆえに，①−②より，

$$(x^2+2x-3)(P(x)-p_0(x)) -(x^2-x-2)(Q(x)-q_0(x))=0$$

$$\therefore\quad (x^2+2x-3)(P(x)-p_0(x)) =(x^2-x-2)(Q(x)-q_0(x)) \quad \cdots\cdots ①'$$

①′は①と同値である．

が得られる．

①′の両辺は，互いに素な x^2+2x-3 と x^2-x-2 の倍数であるから，$(x^2+2x-3)(x^2-x-2)$ の倍数である．

$P(x)$, $Q(x)$ の次数についての仮定より，①′の両辺は，

$$k(x^2+2x-3)(x^2-x-2)$$

（k は0でない実数）

とおくことができ，これより

$$\begin{cases} P(x)-p_0(x)=k(x^2-x-2) \\ Q(x)-q_0(x)=k(x^2+2x-3) \end{cases}$$

を得る．

したがって

$$\begin{cases} P(x)=k(x^2-x-2)+\dfrac{3}{20}x-\dfrac{1}{10} \\ Q(x)=k(x^2+2x-3)+\dfrac{3}{20}x+\dfrac{7}{20} \end{cases}$$

（ただし，k は0でない任意の数である．）

が求める2次式 $P(x)$, $Q(x)$ の一般形である．

研究　ここで示した解法は，整数 x, y についての1次方程式

$ax+by=c$　　（a, b, c は与えられた整数）

の解法（A1.E 2）と本質的に同じである．☞ B.144

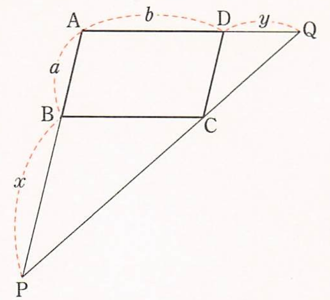
B.505

$AB=a$, $AD=b$ の平行四辺形 ABCD の 1 つの頂点Cを通る直線が 2 辺 AB, AD の延長と交わる点をそれぞれ P, Q とする.

(1) AP＋AQ の最小値を求めよ.

(2) △APQ の面積が最小となるときの BP, DQ の長さを求めよ.

解答 (1) $BP=x$, $DQ=y$ とおくと, x, y は正の実数で, しかも, △PBC∽△CDQ より,



$$\frac{PB}{CD}=\frac{BC}{DQ} \qquad \therefore \quad \frac{x}{a}=\frac{b}{y}$$

$$\therefore \quad xy=ab \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす.

よって,

$$AP+BQ=a+b+x+y$$
$$\geqq a+b+2\sqrt{xy}=a+b+2\sqrt{ab}$$

等号は, ①を満たす正の実数 x, y で,

$x=y$ となるとき, つまり,

$$x=y=\sqrt{ab}$$

のときに成立する.

よって, AP＋AQ の最小値は,

$$a+b+2\sqrt{ab}=(\sqrt{\boldsymbol{a}}+\sqrt{\boldsymbol{b}})^2.$$

(2) $2\triangle APQ=AP\cdot AQ\sin A$

$$=(x+a)(y+b)\sin A$$
$$=(xy+bx+ay+ab)\sin A$$
$$=(2ab+bx+ay)\sin A \qquad ◀ ①を代入$$
$$\geqq(2ab+2\sqrt{bx\cdot ay})\sin A \qquad ◀ \sin A>0$$
$$=(2ab+2ab)\sin A \qquad ◀ ①を代入$$

$$\therefore \quad \triangle APQ\geqq 2ab\sin A$$

等号が成り立つのは, ①を満たす正の実数 x, y で,

$bx=ay$ となるとき, つまり,

$x=a$ かつ $y=b$

のときに成立する.

ゆえに, 求めるべき長さは,

$$BP=\boldsymbol{a}, \qquad DQ=\boldsymbol{b}.$$

B.506

数 α は $\alpha>\sqrt{2}$ を満たす実数とする．このとき

$$\beta=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)$$

とおけば，β は，$\sqrt{2}$ より大きく，しかも α よりも $\sqrt{2}$ に近いことを証明せよ．

アプローチ 証明すべき結論のうち「α よりも $\sqrt{2}$ に近い」を，式で表すにはどのようにしたら良いでしょうか．これがポイントです．

解答 まず，β と $\sqrt{2}$ の大小を比較する．

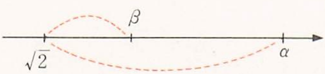
$$\begin{aligned}\beta-\sqrt{2}&=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{2}{\alpha}\right)-\sqrt{2}\\&=\frac{\alpha^2+2-2\sqrt{2}\,\alpha}{2\alpha}\\&=\frac{(\alpha-\sqrt{2})^2}{2\alpha}\qquad\cdots\cdots\cdots\ (*)\end{aligned}$$

となることから，

$$\beta-\sqrt{2}>0\qquad\therefore\ \beta>\sqrt{2}$$

である．しかも $(*)$ は

$$\beta-\sqrt{2}=(\alpha-\sqrt{2})\times\frac{\alpha-\sqrt{2}}{2\alpha}$$



と変形することができる．ここで，

$$0<\frac{\alpha-\sqrt{2}}{2\alpha}<\frac{\alpha}{2\alpha}=\frac{1}{2}$$

であることに注意すれば，不等式

$$\beta-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(\alpha-\sqrt{2})$$

が成り立っている．つまり，β と $\sqrt{2}$ の誤差は，α と $\sqrt{2}$ の誤差の半分未満である．

ゆえに，β は，$\sqrt{2}$ より大きく，α より $\sqrt{2}$ に近い値である．■

［注］ α，β と $\sqrt{2}$ の近さだけを問題にするときには，絶対値をとった誤差 $|\alpha-\sqrt{2}|$，$|\beta-\sqrt{2}|$ を考えるべきであるが，上の解答では，$\sqrt{2}$ と α，$\sqrt{2}$ と β の大小がわかっているので，絶対値をはずした形で議論している．

B.507

a_1, a_2, …, a_n ; b_1, b_2, …, b_n はどれも 0 でない実数とする．実数 t の関数

$$f(t)=(a_1t-b_1)^2+(a_2t-b_2)^2+\ \cdots\ +(a_nt-b_n)^2$$

が，つねに 0 以上の値をとるという事実に注目して，不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ \cdots\ +a_nb_n)^2$$
$$\leqq(a_1{}^2+a_2{}^2+\ \cdots\ +a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\ \cdots\ +b_n{}^2)$$

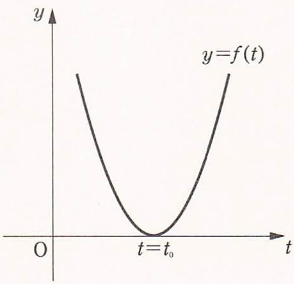
が成立することを証明せよ．

また，等号が成り立つのは，どんな場合か．

解答　$f(t)$ は，$f(t)=(a_1{}^2+a_2{}^2+\ \cdots\cdots\ +a_n{}^2)t^2$

$$-2(a_1b_1+a_2b_2+\ \cdots\cdots\ +a_nb_n)t$$
$$+(b_1{}^2+b_2{}^2+\ \cdots\cdots\ +b_n{}^2)$$

という t の 2 次関数である．初めに与えられた $f(t)$ の式から，つねに $f(t)\geqq 0$ であるので，



$(f(t)$ の判別式$)/4$

$$=(a_1b_1+a_2b_2+\ \cdots\cdots\ +a_nb_n)^2$$
$$-(a_1{}^2+a_2{}^2+\ \cdots\cdots\ +a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\ \cdots\cdots\ +b_n{}^2)$$
$$\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots\ ①$$

である．①を変形すれば求める不等式が得られる．■

不等式①において，等号が成り立つためには $f(t)=0$ を満たす実数 t の値が存在することが必要十分である．

初めに与えられた $f(t)$ の形から，これが成り立つのは

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\ \cdots\cdots\ =\frac{b_n}{a_n}$$

のとき，およびその場合に限る．

［注］本問では，a_1, a_2, …a_n : b_1, b_2, …, b_n が“どれも 0 でない”ことを仮定したが，それは等号の成立条件を表現する都合にすぎず，不等式自身は一般に任意の実数 a_1, a_2, ……, a_n ; b_1, ……, b_n に対して成立する．この不等式は，**コーシーの不等式**(あるいはコーシー・シュヴァルツの不等式)と呼ばれる有名な絶対不等式である．特に，$n=2$ と $n=3$ の場合は，数学Bで学ぶベクトルの内積と密接な関連をもつ．

B. 508

次のおのおのが成立するための実数 a，b，c の満たすべき条件を求めよ．

(1)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ を満たすどのような実数 x，y，z に対してもつねに，$ax+by+cz \geqq 0$ が成り立つ．

(2)　$u \geqq v \geqq w \geqq 0$ を満たすどのような実数 u，v，w に対してもつねに，$au+bv+cw \geqq 0$ が成り立つ．

アプローチ　(1)はじっとにらんでいると答が見えてくるでしょう．後はこれを証明すればよいだけです．このような場合，少し特殊な論法があります．(☞ B.503)　(2)は(1)を使うことを考えましょう．

解答　**(1)**　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ なる任意の x，y，z に対して成り立つためには特に

$$x=1,\ y=0,\ z=0$$

に対しても成り立つことが必要である．

　よって，$a \cdot 1+b \cdot 0+c \cdot 0=a \geqq 0$

でなければならない．同様にして，

$$x=0,\ y=1,\ z=0\ ;\ x=0,\ y=0,\ z=1$$

に対して成り立つべきことから，

$b \geqq 0$；$c \geqq 0$　　が導かれる．

　逆に，$a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$c \geqq 0$ であるとすると，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ なる任意の x，y，z に対して，$ax+by+cz \geqq 0$ となることは明らかである．

　以上より求める条件は

$$\boldsymbol{a \geqq 0}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{b \geqq 0}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{c \geqq 0}$$

である．

(2)　$u-v=x$，$v-w=y$，$w=z$ とおけば $u=x+y+z$，$v=y+z$，$w=z$ であって，しかも，

$$u \geqq v \geqq w \geqq 0 \iff x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

であるから，求めるべき条件は，

「$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ をみたす任意の x，y，z に対して，$a(x+y+z)+b(y+z)+cz \geqq 0$，すなわち，$ax+(a+b)y+(a+b+c)z \geqq 0$ が成りたつ」

ための条件であり，したがって，(1)より，

$$\boldsymbol{a \geqq 0}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{a+b \geqq 0}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{a+b+c \geqq 0}$$

が求めるものである．

B.509

実数 x，y についての条件Aを次のように定める：

A：$y>-x^2+ax+a-2$ かつ $y<x^2-(a-2)x+3$.

次の(1)，(2)が成立する実数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ．

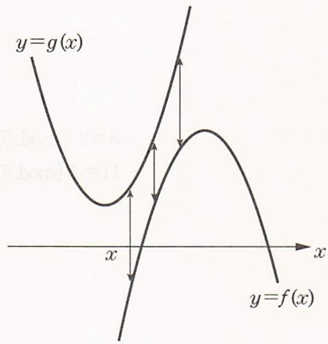
(1) どんな x に対しても，それぞれ適当な y をとればAが成り立つ．

(2) 適当な y をとれば，どんな x に対してもAが成り立つ．

アプローチ (1)と(2)の区別がポイントです．(1)では，y は x に応じていろいろ変化してもよいのですが，(2)では，y は x によらない値でなければなりません．

解答 $\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+ax+(a-2) \\ g(x)=x^2-(a-2)+3 \end{array}\right\}$ とおく．

(1) 「適当な y をとれば $f(x)<y<g(x)$ となる」のは，$f(x)<g(x)$ のときであるから，条件は「すべての x に対し，$f(x)<g(x)$ が成り立つ」と同値である．



$f(x)<g(x)$ を整理すると

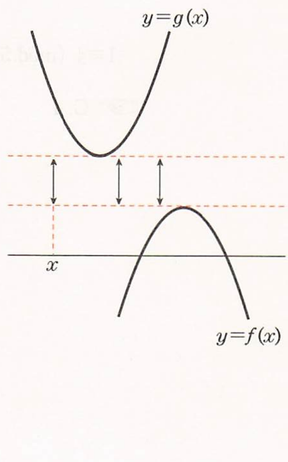
$$2x^2-2(a-1)x+(5-a)>0$$

となる．これがすべての x に対して成立する条件は

$$(a-1)^2-2(5-a)=a^2-9<0$$

である．よって求める a の範囲は　$\boldsymbol{-3<a<3}$.

(2) 「どんな x に対しても $f(x)<y<g(x)$ が成り立つ」のは，($f(x)$ の最大値)$<y<$($g(x)$ の最小値)のときであり，これが適当な y に対して成り立つことは，($f(x)$ の最大値)$<$($g(x)$ の最小値) と同値である．



$$f(x)=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+a-2$$

$$g(x)=\left(x-\frac{a-2}{2}\right)^2+3-\frac{(a-2)^2}{4}$$

であるから，結局(2)の条件は

$$\frac{a^2}{4}+a-2<3-\frac{(a-2)^2}{4}$$

と同値である．これを整理すると $a^2<8$ となる．

よって求める a の範囲は　$\boldsymbol{-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}}$.

B. 510

$a+b$ と ab を5で割った余りがそれぞれ1と3であるような整数 a, b がある．

(1)　a^3+b^3, $(a-b)^2$ を5で割った余りを求めよ．

(2)　a, b を5で割った余りを求めよ．

アプローチ　対称式の計算を，「余り」に注目して書き換えます．

A1.E 5 II, III を見よ．

解答　**(1)**　合同式を使って書く．

$$\begin{cases} a+b\equiv 1 \pmod{5} & \cdots\cdots\cdots ① \\ ab\equiv 3 \pmod{5} & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

であるから，

$$\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab \end{cases}$$

により

$$\begin{cases} a^3+b^3\equiv 1^3-3\cdot 3\cdot 1 \pmod{5} \\ (a-b)^2\equiv 1^2-4\cdot 3 \pmod{5} \end{cases}$$

$-8\equiv 2$ (mod.5)
$-11\equiv 4$ (mod.5)

$$\therefore \begin{cases} a^3+b^3\equiv 2 \pmod{5} & \cdots\cdots\cdots ③ \\ (a-b)^2\equiv 4 \pmod{5} & \cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$$

を得る．すなわち，a^3+b^3, $(a-b)^2$ を5で割った余りは，それぞれ **2**, **4** である．

(2)
$$\begin{cases} 0^2\equiv 0 \pmod{5},\ (\pm 1)^2\equiv 1 \pmod{5} \\ (\pm 2)^2\equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

であるから，④より

$$a-b\equiv \pm 2 \pmod{5} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

を得る．そこで ①±⑤ を作ると，

$-1\equiv 4$ (mod.5)

$$\begin{cases} 2a\equiv 3 \pmod{5} \\ 2b\equiv 4 \pmod{5} \end{cases} \text{ または } \begin{cases} 2a\equiv 4 \pmod{5} \\ 2b\equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

☞ C. 4

となるが，$2\cdot 0\equiv 0 \pmod{5}$　$2\cdot 1\equiv 2 \pmod{5}$
$2\cdot 2\equiv 4 \pmod{5}$　$2\cdot 3\equiv 1 \pmod{5}$
$2\cdot 4\equiv 3 \pmod{5}$

であるから，

$$\begin{cases} a\equiv 4 \pmod{5} \\ b\equiv 2 \pmod{5} \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a\equiv 2 \pmod{5} \\ b\equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

よって，a と b を5で割った余りは，**2と4** または **4と2** である．

B.511

整数 a，b，c を係数とする3次式

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

に対し，次の事実を証明せよ．

(1)　$f(x)=0$ を満たす有理数 x が存在するならば，x は整数である．

(2)　$f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ のどれも3で割り切れないならば方程式 $f(x)=0$ は有理数の解を持たない．

アプローチ　(1)　$x=\dfrac{q}{p}$ とおいて $p=1$ を示します．$\dfrac{q}{p}$ が既約分数であるという仮定も忘れずに．　(2)　x を3で割った余りに注目して，$f(x)=0$ が整数解を持たないことを示します．

解答　(1)　$x=\dfrac{q}{p}$ (p と q は互いに素) が $f(x)=0$ の解であったとすると，

$$\left(\frac{q}{p}\right)^3+a\left(\frac{q}{p}\right)^2+b\frac{q}{p}+c=0$$

$$\therefore\quad q^3=-aq^2p-bqp^2-cp^3$$

ここで右辺は p で割り切れるから，q^3 も p で割り切れる．ところが，q と p は1以外に公約数を持たないから，$p=1$ でなければならない．■

(2)　x を3で割った余りを r ($r=0$，±1) とすると，

$f(x)$ を3で割った余り
　　$=f(r)$ を3で割った余り　………　①

が成立する．仮定により $f(0)$，$f(\pm1)$ はどれも3で割り切れないから，任意の整数 x に対し，$f(x)$ は3で割り切れない．特に，どんな整数 x に対しても $f(x)$ は0でない．したがって $f(x)=0$ は整数解を持たないので，(1)により有理数解も持たない．■

[注]　(1)，(2)の事実は，一般の整数を係数とする多項式

$$f(x)=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots+cx+d$$

に対して成立する．また $f(0)$，$f(1)$，……，$f(n-1)$ のどれも n で割り切れなければ，$f(x)=0$ が有理数解を持たないことも，同様にして示せる．

B. 512

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　a_n がいつ奇数・偶数になるか調べよ．

(2)　a_n を3で割った余りについて調べよ．

アプローチ　これはA2.8で紹介したフィボナッチ数列ですが，そこで与えられている一般項の表示式は本問には役立ちません．ここでは，2で割った余り，3で割った余りのみに注目するのです．

解答　(1)　a_n を2で割った余りを $b_n(=0,\ 1)$ と表すことにすると

$b_{n+2}=(b_{n+1}+b_n$ を2で割った余り$)$

が成り立つ．

a_n は手前の2つの項によって決定されるが，2で割った余り b_n もそう．

b_n の最初の数項は1，1，0，1，1，0，……

となっている．b_n は手前の2つの項によって決定するが，$b_4=b_1=1$，$b_5=b_2=1$ より $\{b_n\}$ は周期3を持つことがわかる．よって

$$\begin{cases} n\text{が3の倍数のとき} & a_n\text{は偶数} \\ \text{それ以外のとき} & a_n\text{は奇数} \end{cases}$$

となる．

(2)　a_n を3で割った余りを c_n で表すことにする．c_n の最初の数項は

1 1 2 0 2 2 1 0 1 1 2 0 2……

であるが，c_n は手前の2つの項で決まるので

$c_9=c_1=1$，$c_{10}=c_2=1$ となったところで，$\{c_n\}$ は周期8を持つことがわかる．よって

n を8で割った余りが1，2，7のとき　$c_n=1$

n を8で割った余りが3，5，6のとき　$c_n=2$

n を8で割った余りが4，0のとき　$c_n=0$

となる．

［注］(1)　$b_1=1$，$b_2=0$（たとえば $a_1=1$，$a_2=3$）ならば $\{b_n\}$ の周期は3になる．

(2)　(2)では $c_1=c_2=0$ のときを除いて周期は8である．(成分が0，1，2のいずれかである組 $(\alpha,\ \beta)$ は9つあるので組 $(c_n,\ c_{n+1})$ の起こり方は9通り以下である．よって周期が9以下であることはあらかじめわかってしまう．)

B. 513

nを自然数とする．$1 \leqq x_j \leqq n$ を満たすr個の自然数の列$(x_1,\ \cdots,\ x_r)$で，条件「各 $i=1,\ \cdots,\ n$に対し，i以下の項の個数はiより小さい」を満たすものの総数を$g(n,\ r)$で表す．$r \leqq n$ のとき $g(n,\ r)=(n-r)n^{r-1}$ となることを証明せよ．

アプローチ　$r \leqq n$ を満たす組$(r,\ n)$すべてに対して証明せよ，という形の問題です．

解答　条件を満たす列からnをすべて除くと，長さがk $(0 \leqq k \leqq r)$で条件を満たす列を得る．逆に各項が$1,\ \cdots,\ n-1$のいずれかになっている長さkの列が条件を満たしていると，$r-k$ 個のnを新しい項として入れることによって長さrの列で，各項が1からnのいずれかであって条件を満たすものを得る．このとき，nの入れ方は${}_r\mathrm{C}_k$通りある．したがって，$g(n,\ r)$は $1 \leqq r \leqq n$ に対し

$$g(n,\ r)=\sum_{k=1}^{r} {}_r\mathrm{C}_k\, g(n-1,\ k)+1 \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

という漸化式を満たす．

以上の準備の下，$g(n,\ r)=(n-r)n^{r-1}$　………②

をnに関する帰納法で示す．

$n=1$ のとき $g(1,\ 1)=0$ であるから②は確かに成立する．次に，$n-1$ までO.Kとする．

このとき(1) $r=n$ ならば，n以下の項の個数がnとなってしまうので，$g(n,\ n)=0$ となり②は成立する．また，(2) $r<n$ ならば

$$g(n,\ r)=\sum_{k=1}^{r} {}_r\mathrm{C}_k(n-1-k)(n-1)^{k-1}+1$$

◀①と帰納法の仮定を用いた．

$$=\sum_{k=0}^{r} {}_r\mathrm{C}_k(n-1)^k-\sum_{k=1}^{r} {}_r\mathrm{C}_k\, k(n-1)^{k-1}$$

$$=((n-1)+1)^r-r\sum_{k=1}^{r} {}_{r-1}\mathrm{C}_{k-1}(n-1)^{k-1}$$

◀$\dfrac{r!}{k!(r-k)!}\cdot k = r\cdot\dfrac{(r-1)!}{(k-1)!(r-k)!}$ $(k \geqq 1)$

$$=n^r-r((n-1)+1)^{r-1}$$

$$=n^r-r\,n^{r-1}=(n-r)n^{r-1}$$

(1)，(2)より $n-1$ のとき O.K $\Longrightarrow$ nのときO.K が示され，結局すべてのnに対し②が証明された．■

B.514

数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ を2でも3でも割り切れない自然数を小さい方から順に並べたものとする．

(1)　a_n を求めよ

(2)　$S_n=a_1+\cdots\cdots+a_n$ を求めよ

アプローチ　2でも3でも割り切れないという条件を，6で割った余りで表すとどうなりますか．最初の数項を実際に求めてみて見通しを立てるのもよいでしょう．

解答　(1)　2でも3でも割り切れないということは，6で割った余りが1または5になる，と言いかえられる．すなわち，自然数の列，1，2，3，……を6項づつのブロックに区切ると，k 番目のブロック $6k-5$, $6k-4$, $6k-3$, $6k-2$, $6k-1$, $6k$ のうちで，条件を満たすのは，$6k-5$ と $6k-1$ である．

よって　$a_{2k-1}=6k-5$,　$a_{2k}=6k-1$　………①

である．これは

n の偶奇に応じて表示が異なる．

$$a_n=\begin{cases} \mathbf{3n-2} & \mathbf{n}\textbf{が奇数のとき} \\ \mathbf{3n-1} & \mathbf{n}\textbf{が偶数のとき} \end{cases}$$

といいかえられる．

(2)　n が偶数か奇数かで場合分けする．

n が偶数のとき

(1)の欄外注意で述べたことから，$a_n=3n-2$, $3n-1$ の表示を等差数列の和の公式に代入することはできない．

$$\begin{aligned} S_n&=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots\cdots+(a_{n-1}+a_n)\\ &=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(a_{2k-1}+a_{2k})\\ &=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\{(6k-5)+(6k-1)\}\quad(\text{①より})\\ &=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(12k-6)\\ &=\mathbf{\frac{3}{2}n^2}. \end{aligned}$$

n が奇数のとき

$$\begin{aligned} S_n&=S_{n-1}+a_n\\ &=\frac{3}{2}(n-1)^2+(3n-2)\\ &=\mathbf{\frac{3n^2-1}{2}}. \end{aligned}$$

B. 515

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$ と直線 $x=0$

で囲まれた領域(境界も含む)を考える．

(1)　k を自然数とする．この領域と直線 $y=k$ の共通部分にある格子点の個数を a_k とする．$\{a_k\}$ はどのような数列か．

(2)　mを自然数とする．この領域の $y \leqq 2m^2$ を満たす部分に含まれる格子点の個数を求めよ．

アプローチ　まず図を描いて，$\{a_k\}$ がどのような数列であるか見当をつけます．$1+2+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$ であることに注目しましょう．

解答　(1)　nを0以上の整数とする．kが

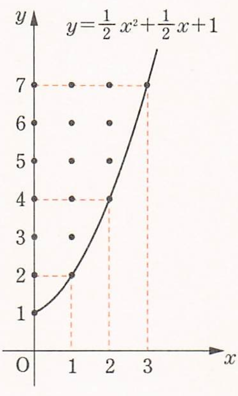
$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1 \leqq k < \frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)+1$$

を満たすとき，$a_k=n+1$ である．またこのような

k は $\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)-\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)=n+1$

個ある．

よって，数列 $\{a_k\}$ は1，2，2，3，3，3，……のように1から始まり，k が k 個並んだあと，$k+1$ が $k+1$ 個並ぶ数列である．



(2)　まず，a_{2m^2} を求める．

$$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1 \leqq 2m^2 < \frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)+1$$

を満たすnを求めると　$n=2m-1$ となるので

$a_{2m^2}=2m$ である．

ここで，$\frac{1}{2}(2m-1)^2+\frac{1}{2}(2m-1)=2m^2-m$

より，$2m-1$ が並び終るのは第 $2m^2-m$ 項においてである．よって，求める格子点の個数は

$$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2m^2-m}+a_{2m^2-m+1}+\cdots+a_{2m^2}$$

$$=1+(2+2)+\cdots+\{\underbrace{(2m-1)+\cdots+(2m-1)}_{2m-1\text{ 個}}\}+(\underbrace{2m+\cdots+2m}_{m\text{個}})$$

$$=\sum_{k=1}^{2m-1}k^2+m\cdot(2m)=\frac{1}{6}(2m-1)2m(4m-1)+2m^2=\boldsymbol{\frac{m(8m^2+1)}{3}}.$$

B. 516

連立漸化式

$$\begin{cases} p_{n+1}=p_n+2q_n & \cdots\cdots\cdots ① \\ q_{n+1}=2p_n+2q_n & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases} \qquad p_0=0,\ q_0=1$$

を解け

アプローチ p_n（または q_n）のみを含む三項間漸化式を作るか，または①，②を何倍かしてたし合うことによって等比数列を作ることを考えます．

解答　**（その１）**　$\{p_n\}$ に関する三項間漸化式をつくる．①より

$$q_n=\frac{1}{2}p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

n のところに $n+1$ を代入して

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_{n+2}-\frac{1}{2}p_{n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

③と④を②に代入して整理すると

$$p_{n+2}-3p_{n+1}-2p_n=0 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

これを

$$p_{n+2}-ap_{n+1}=b(p_{n+1}-ap_n) \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

の形に変形するためには，$a+b=3$，$ab=-2$ となる a，b を求めればよい．a，b は

$t^2-3t-2=0$ の２解，すなわち

$$(a,\ b)=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2},\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\text{または}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2},\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

である．

①より　$p_1=2$ であるから，⑥より

$$p_{n+1}-ap_n=b^n(p_1-ap_0)$$
$$=2b^n$$

２通りの代入を行なう．

ここで，a，b の値を代入すると

$$p_{n+1}-\frac{3+\sqrt{17}}{2}p_n=2\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

$$p_{n+1}-\frac{3-\sqrt{17}}{2}p_n=2\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n \qquad \cdots\cdots\cdots ⑧$$

(⑧−⑦)÷$\sqrt{17}$ を計算すると

$$\boldsymbol{p_n}=\frac{2}{\sqrt{17}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right\} \quad \cdots\cdots\cdots ⑨$$

これを③に代入して

$$\boldsymbol{q_n}=\frac{1}{\sqrt{17}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)-\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\right\} \quad \cdots\cdots\cdots ⑩$$

(その2)　α を実数として，①＋α×②
の式を作る．すなわち

$$p_{n+1}+\alpha q_{n+1}=(1+2\alpha)p_n+(2+2\alpha)q_n \quad \cdots\cdots\cdots ⑪$$

このとき，もし α が

$$2+2\alpha=\alpha(1+2\alpha) \quad \cdots\cdots\cdots ⑫$$

◀つまり
$1:\alpha=(1+2\alpha):(2+2\alpha)$

を満たせば，⑪は

$$p_{n+1}+\alpha q_{n+1}=(1+2\alpha)(p_n+\alpha q_n)$$

と書き直すことが出来，したがって

$$p_n+\alpha q_n=(1+2\alpha)^n(p_0+\alpha q_0)$$
$$=(1+2\alpha)^n\alpha \quad \cdots\cdots\cdots ⑬$$

となる．

⑫を α についての２次方程式とみて解く．⑫は

$$2\alpha^2-\alpha-2=0$$

と書き直せるので，解の公式より

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{17}}{4} \quad \text{または} \quad \alpha=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

これら２つの α の値をそれぞれ⑬に代入すると

$$p_n+\frac{1-\sqrt{17}}{4}q_n=\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$$

$$p_n+\frac{1+\sqrt{17}}{4}q_n=\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$$

この，p_n と q_n の連立一次方程式を解くと解答
（その１）の⑨，⑩と同じ答を得る．

［注］上の２つの解法を比較するためには，数学Ｃで学ぶ行列の理論
(行列の対角化）を待たねばならない．

B. 517

a，b，c，d の 4 文字を用いて，条件

「a と b は隣り合わない」　………（∗）

を満たす列を作る．長さ n の列の総数を求めよ．

アプローチ 長さ $n-1$ のそのような列があったとして，先頭に 1 つ文字を置くことによって長さ n の列を作ります．条件（∗）を満たすようにするには，どの文字を置くことが出来ますか．

解答 （∗）を満たす長さ $n-1$ の列があるとすると，その列が

1)　a で始まるとき，a または c または d を，

1)′　b で始まるとき，b または c または d を，

2)　c または d で始まるとき，a，b，c，d のうちのいずれかを

先頭に置くと，（∗）を満たす長さ n 列を得る．また，（∗）を満たすどのような長さ n の列も，（∗）を満たす長さ $n-1$ の列から上の方法によって得られる．

したがって，先頭が a または b である長さ n の（∗）を満たす列の総数を p_n で表し，先頭が c または d である長さ n の（∗）を満たす列の総数を q_n で表すと，漸化式

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1} & \cdots\cdots ① \quad p_1 = 2 \\ q_n = 2p_{n-1} + 2q_{n-1} & \cdots\cdots ② \quad q_1 = 2 \end{cases}$$

を得る．

この漸化式は B.516 で扱ったものと同一である．（形式的に $p_0=0$，$q_0=1$ とおくと確かに $p_1=2$，$q_1=2$ である．）よって，B.516 の結果を用いると，長さ n の列の総数 p_n+q_n は

$$\boldsymbol{p_n + q_n = \frac{1}{\sqrt{17}}\left\{\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) - \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\right\}}$$

となる．

B. 518

qを0でも1でもない定数とする．このとき，各自然数nに対し

$$(1+q^n x)(1+q^{n-1}x)\cdots\cdots(1+qx)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)_q x^k \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

が成立することを示せ．ただし

$$({}_n\mathrm{C}_k)_q=\begin{cases}1 & (k=0 \text{ のとき}) \\ (-1)^k\dfrac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\cdots\cdots(1-q^{-k})} & (k\geqq 1 \text{ のとき})\end{cases}$$

解答　nに関する帰納法で示す．

$n=1$ のとき，$({}_1\mathrm{C}_0)_q=1$，

$({}_1\mathrm{C}_1)_q=-\dfrac{(1-q^1)}{(1-q^{-1})}=q$ より正しい．

$n=l$ のとき正しいとする．すなわち

$$(1+q^l x)(1+q^{l-1}x)\cdots\cdots(1+qx)=\sum_{k=0}^{l}({}_l\mathrm{C}_k)_q x^k$$

とする．このとき

$$(1+q^{l+1}x)(1+q^l x)\cdots\cdots(1+qx)$$
$$=(1+q^{l+1}x)\sum_{k=0}^{l}({}_l\mathrm{C}_k)_q x^k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{l}\{({}_l\mathrm{C}_k)_q+({}_l\mathrm{C}_{k-1})_q q^{l+1}\}x^k+({}_l\mathrm{C}_l)_q q^{l+1}x^{l+1}$$
$$=(**)$$

ここで

$$({}_l\mathrm{C}_k)_q+({}_l\mathrm{C}_{k-1})_q q^{l+1}$$
$$=(-1)^k\left\{\frac{(1-q^l)(1-q^{l-1})\cdots\cdots(1-q^{l-k+1})}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\cdots\cdots(1-q^{-k})}\right.$$
$$\left.-\frac{(1-q^l)(1-q^{l-1})\cdots\cdots(1-q^{l-k+2})}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\cdots\cdots(1-q^{-(k-1)})}q^{l+1}\right\}$$
$$=(-1)^k\frac{(1-q^l)(1-q^{l-1})\cdots\cdots(1-q^{l-k+2})\{(1-q^{l-k+1})-(1-q^{-k})q^{l+1}\}}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\cdots\cdots(1-q^{-(k-1)})(1-q^{-k})}$$
$$=(-1)^k\frac{(1-q^l)(1-q^{l-1})\cdots\cdots(1-q^{l-k+2})\times(1-q^{l+1})}{(1-q^{-1})(1-q^{-2})\cdots\cdots(1-q^{-k})}$$
$$=({}_{l+1}\mathrm{C}_k)_q$$

であり，また

$$({}_lC_l)_q q^{l+1}=(-1)^l\frac{(1-q^l)\cdots(1-q)}{(1-q^{-1})\cdots(1-q^{-l})}q^{l+1}$$

$$=(-1)^{l+1}\frac{(1-q^{l+1})(1-q^l)\cdots(1-q)}{(1-q^{-1})\cdots(1-q^{-l})(1-q^{-(l+1)})}$$

$$=({}_{l+1}C_{l+1})_q$$

であるから

$$(**)=\sum_{k=0}^{l+1}({}_{l+1}C_k)_q x^k$$

となる．すなわち，(*)は $n=l+1$ のときも正しい．

以上より，すべてのnに対し，(*)が成立することが確められた．■

［注］ $(1-q^m)=(1-q)(1+q+\cdots\cdots+q^{m-1})$ や，

$$\frac{-1}{1-q^{-m}}=\frac{q^m}{1-q^m}=\frac{q^m}{(1-q)(1+q+\cdots\cdots+q^{m-1})}$$ などを用いて $({}_nC_k)_q$ を書き直せば問題文中の(*)において $q=1$ とおくことが出来て，その時，2項定理

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\,x^k$$

を得る．よって，(*)は2項定理に〝q〟というヒネリを加えて一般化した式と見なせる．

B. 519

直線上に，赤と白の旗をもった何人かの人が，番号 0，1，2，……をつけて並んでいる．番号 0 の人は，赤と白の旗を等しい確率で無作為であげるものとし，他の番号 j の人は，番号 $j-1$ の人のあげた旗の色を見て，確率 p で同じ色，確率 $1-p$ で異なる色の旗をあげるものとする．この時，番号 0 の人と番号 n の人が同じ色の旗をあげる確率 P_n を求めよ．

アプローチ　P_{n+1} と P_n との関係を考察すると，数列 $\{P_n\}$ の満たす漸化式がわかります．これを利用すると解ける問題のうちでは，もっとも基本的なものです．

解答　番号 n の人が番号 0 の人と同じ色の旗をあげる事象を A_n，番号 $n+1$ の人が番号 n の人と同じ色の旗をあげる事象を B_n とする．

$$A_{n+1}=(A_n\cap B_n)\cup(\overline{A_n}\cap\overline{B_n})$$

であるから，

$$\begin{aligned}P(A_{n+1})&=P(A_n\cap B_n)+P(\overline{A_n}\cap\overline{B_n})\\&=P(A_n)\cdot P_{A_n}(B_n)\\&\qquad+P(\overline{A_n})\cdot P_{\overline{A_n}}(\overline{B_n})\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

◀ $P(X\cap Y)=P(X)\cdot P_X(Y)$

そして

$$\left.\begin{array}{l}P(A_n)=P_n,\ P(\overline{A_n})=1-P_n\\P_{A_n}(B_n)=p,\ P_{\overline{A_n}}(\overline{B_n})=1-p\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots②$$

◀ B_n がおこるかどうかは A_n のおこるかどうかとは関係がなく，n にもよらない．

①，②より

$$P_{n+1}=P_n\cdot p+(1-P_n)\cdot(1-p)$$

整理すると，

$$P_{n+1}=(2p-1)P_n+(1-p)$$

◀ 以下，2 項間線形漸化式の処理の定石．

これが $\{P_n\}$ の満たす漸化式である．これを書直して，

$$P_{n+1}-\frac{1}{2}=(2p-1)\left(P_n-\frac{1}{2}\right)$$

よって，$\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ は公比 $2p-1$ の等比数列であり，

$$P_n-\frac{1}{2}=(2p-1)^n\left(P_0-\frac{1}{2}\right)$$

$P_0=1$ であるから，

◀ 番号 0 の人が番号 0 の人と同じ色をあげる確率は 1 である．

$$P_n=\boldsymbol{\frac{1}{2}(2p-1)^n+\frac{1}{2}}.$$

B. 520

甲，乙があるゲームをくり返す．このゲームに引き分けはなく，最初のゲームで甲の勝つ確率は2/3である．また，2回目以後のゲームで甲の勝つ確率は，「前回甲が勝った場合は3/4」，「前回甲が負けた場合は1/4」である．

(1)　n 回目のゲームで甲の勝つ確率 P_n を求めよ．

(2)　最初のゲームで甲が勝ったという条件のもとに，n 回目のゲームで甲が勝つ確率 q_n を求めよ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

解答

（1）「$n+1$ 回目に甲が勝つ」は
「n 回目に甲が勝ち，次も甲が勝つ」，
「n 回目に甲は負けたが，次は甲が勝つ」
の2つに分けられるので，　……⓪

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{3}{4}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

整理すると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

以下，2項間線型漸化式の定石 ▶ これが $\{p_n\}$ の満すべき漸化式である．書き直して

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{2}\right) \quad \cdots\cdots ②'$$

漸化式②′は $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ で成立している． ▶

$$\therefore\quad p_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{2}\right) \quad \cdots\cdots ③$$

$p_1=\dfrac{2}{3}$ であるから，$\boldsymbol{p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$．

（2）　最初のゲームに甲が勝ったという条件のもとでも，$n \geqq 2$ に対しては，上の(1)の⓪がやはり成立しているのだから，

$$q_{n+1}=q_n\cdot\frac{3}{4}+(1-q_n)\cdot\frac{1}{4} \qquad (n \geqq 2)$$

が成立している．したがって，

$$q_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(q_n-\frac{1}{2}\right) \qquad (n \geqq 2)$$

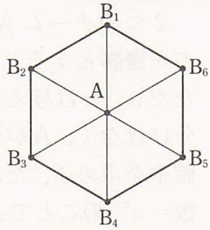
$\{q_n\}$ では q_2 が初項である． ▶

$$\therefore\quad q_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(q_2-\frac{1}{2}\right)$$

題意より $q_2=\dfrac{3}{4}$ だから，$\boldsymbol{q_n=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}}$．

B. 521

図のような，長さ1の12本の線分上を，毎秒1の速さで移動する点Pがある．Pは各頂点では，可能な進路(たとえば，Aでは6通り，B_1では3通り)のどれかを等確率で選ぶ．PはAから出発するものとして，n秒後に，Aにいる確率をa_n，B_1にいる確率を b_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とする．a_{n+1}，b_{n+1} と a_n，b_n との関係を考察することにより，a_n，b_n を求めよ．



解答 まず，対称性よりして，n秒後にB_2にいる確率も b_n，B_3にいる確率も b_n，…… である．

(◀ "対称性"とは図形の対称性ならびに初期状態の対称性(出発点はA))

$(n+1)$秒後にAにいるには，n秒後にはB_kのいずれかにいなければならず，各B_kからAにゆく確率は$\dfrac{1}{3}$である．よって

$$a_{n+1}=6\left(\frac{1}{3}b_n\right)=2b_n \qquad \cdots\cdots\text{①}$$

(◀ 説明ぬきでこの結果のみを書くのでは，不完全解答になる．)

また，つねにPは，A，B_1……B_6のいずれかにいることから，

$$a_n+6b_n=1 \qquad \cdots\cdots\text{②}$$

である．

①，②より b_n を消去すると，

$$a_{n+1}=2\cdot\frac{1}{6}(1-a_n)=-\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{1}{4}\right)$$

(◀ 線形漸化式の標準変形)

$$\therefore\quad a_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(a_0-\frac{1}{4}\right)$$

$a_0=1$ を代入して　$a_n=\dfrac{1}{4}\left\{1+3\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$．

(◀ これを①に代入してもb_nが出る．)

②に代入して　$b_n=\dfrac{1}{8}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$．

(◀ $n=0,\ 1$ として検算せよ．)

［注］　n秒後にB_1にいる確率，B_2にいる確率，B_3にいる確率，……がすべて等しいことを対称性を用いずに示すには，これらに関する漸化式をたてて，nに関する帰納法で証明することになる．

B. 522

2つのチームA，Bが，どちらかが先にn回勝ち越した方を優勝とするという規則で試合をくり返すこととなった．ただし，nは与えられた正の整数とする．個々の試合に引き分けはなく，AがBに勝つ確率は1/3である．Aが優勝する確率を求めよ．ただし，“n回勝ち越し”とは“勝ち数－負け数＝n”のことである．

解答 Aがすでにk回勝ち越しているという条件の下で，さらにゲームをくり返したとしてAが優勝する確率をp_kとする．求めている確率はp_0である．

▶ $-n \leqq k \leqq n$である（下の注参照）

Aがすでにk回勝ち越しているとき，次の試合でAが勝てば，$(k+1)$回勝ち越したことになり，負ければ$(k-1)$回勝ち越したことになるので，Aが優勝する確率p_kについて

$$p_k = \frac{1}{3}p_{k+1} + \frac{2}{3}p_{k-1} \quad (-n < k < n) \quad \cdots\cdots ①$$

という関係式が成り立つ．そうして，

▶ $-n$回勝ち越していれば相手が優勝している．

$$p_{-n} = 0, \ p_n = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

である．見やすくするために

▶ x_mのmの範囲は$0 \leqq m \leqq 2n$

$$p_k = x_{n+k} \quad \cdots\cdots ③$$

とおく．①より

▶ $x_m = \frac{1}{3}x_{m+1} + \frac{2}{3}x_{m-1}$ を書き直した．

$$x_{m+1} - x_m = 2(x_m - x_{m-1}) \quad (0 < m < 2n)$$

$$\therefore \ x_{m+1} - x_m = 2^m(x_1 - x_0) \quad \cdots\cdots ④$$

また　$x_0 = 0, \ x_{2n} = 1 \quad \cdots\cdots ⑤$

▶ 初項と終項が与えられた三項間漸化式を解く．

④，⑤より

$$1 = x_{2n} - x_0 = \sum_{m=0}^{2n-1}(x_{m+1} - x_m) = (x_1 - x_0)\sum_{m=0}^{2n-1}2^m$$

▶ 公比＝2 の等比数列の和

$$= (x_1 - x_0)(2^{2n} - 1) \quad \cdots\cdots ⑥$$

$$\therefore \ x_1 - x_0 = \frac{1}{2^{2n} - 1} \quad \cdots\cdots ⑦$$

そこで，

$$p_0 = x_n - x_0 = \sum_{m=0}^{n-1}(x_{m+1} - x_m) = (x_1 - x_0)\sum_{m=0}^{n-1}2^m$$

▶ 同上

$$= (x_1 - x_0)(2^n - 1) \quad \cdots\cdots ⑧$$

▶ $2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$

⑦，⑧より　$\boldsymbol{p_0 = \frac{2^n - 1}{2^{2n} - 1} = \frac{1}{2^n + 1}}$．

B. 523

袋の中に赤球3個と白球1個が入っている．この袋の中から1球を取り出し，かわりに白球1個を袋に返す．この操作をn回 ($n \geqq 2$) くり返す．

(1)　n回くり返した後に，袋の中に赤球が2個残っている確率を求めよ．

(2)　n回くり返した後に，袋の中に赤球が1個残っている確率を求めよ．

解答　**(その1)**　n回くり返した後に，袋の中に残っている赤球が3個，2個，1個である確率をそれぞれp_n，q_n，r_nとする．$n+1$回後に赤が3個残るのは，n回後に赤が3個残っていてかつ，次に白球が取出される場合だから，$p_{n+1}=p_n\cdot\dfrac{1}{4}$　………①

また，$n+1$回後に赤が2個残るのは，n回後に赤が3個残っていて，次に赤球が取出される場合と，n回後にすでに赤が2個残っていて，次に白球が取出される場合との2つがあるので，

$$q_{n+1}=p_n\cdot\frac{3}{4}+q_n\cdot\frac{2}{4} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

◀この種の説明なしに直ちに②式のみ書くのでは，乱暴な答案となる．

全く同様の考えによって

$$r_{n+1}=q_n\cdot\frac{2}{4}+r_n\cdot\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

◀上と同じような説明を各自書いてみよ．

①〜③が$\{p_n\}$，$\{q_n\}$，$\{r_n\}$の満たすべき漸化式である．ただし，$p_0=1$，$q_0=r_0=0$　………④

まず，①，④より　$p_n=p_0\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$　………㋑

(1)　㋑を②に代入すると，

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \cdots\cdots\cdots ⓐ$$

◀ⓐの両辺に2^{n+1}をかけて　$2^nq_n=x_n$　についての漸化式　$x_{n+1}-x_n=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$　を用いる方法もある．

書き直すと　$q_{n+1}+3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{2}\left\{q_n+3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$

これから　$q_n+3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(q_0+3)=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$\therefore\quad q_n=3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}. \quad \cdots\cdots\cdots ㋺$$

（2）㋺を③に代入して，

$$r_{n+1}=\frac{3}{4}r_n+\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

変形して

この変形は気づきにくいであろうが…….

$$r_{n+1}+6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{3}{4}\left\{r_n+6\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

これから

$$r_n+6\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{3}{4}\right)^n(r_0+3)=3\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\therefore\quad r_n=3\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}.$$

注意　①×3＋②を作ると $3p_{n+1}+q_{n+1}=\frac{1}{2}(3p_n+q_n)$，これより $3p_n+q_n$ が求まり，これと㋑を組合せても(1)の答が得られる．

同様に，①×3＋②×2＋③ を作ると

$$3p_{n+1}+2q_{n+1}+r_{n+1}=\frac{3}{4}(3p_n+2q_n+r_n)$$

となり，$3p_n+2q_n+r_n$ を求まる．これと，㋑，㋺を組合せても(2)の答が得られる．

（その2）（1）「n 回中，1回だけ赤球が出て，他は白球が出る」場合である．k 回目だけ赤球が，他は白球が出る確率 x_k は $\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^{n-k}$．よって

何回目に赤球が出るかで分類する．

$\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}=\sum_{l=0}^{n-1}2^l$

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{3}{4^n}\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}=3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}.$$

（2）「n 回中，2回だけ赤球が出て，他は白球が出る場合」である．l 回目に2つの目の赤球が出て後は白球のみの確率 y_l は $q_{l-1}\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-l}$

2つ目の赤球がいつ出るかで場合分け，q_n がうまく使える．

$$\therefore\quad r_n=\sum_{l=2}^{n}y_l=\sum_{l=2}^{n}q_{l-1}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-l}$$

$$=\sum_{l=2}^{n}3\cdot\frac{2^{l-1}-1}{4^{l-1}}\cdot\frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-l}$$

n 乗のベキを前に出した．

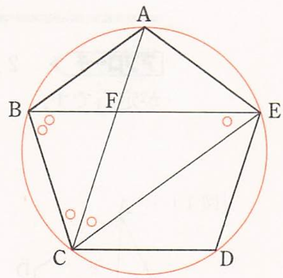
$$=3\left(\frac{3}{4}\right)^n\sum_{l=2}^{n}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^l-2\left(\frac{1}{3}\right)^l\right\}$$

$$=\frac{3}{4^n}(3^n-2^{n+1}+1).$$

B.524

正五角形 ABCDE の5本の対角線が内部に作る正五角形と，正五角形 ABCDE との面積比を求めよ．

アプローチ 対角線 AC，BE，CE だけ描いて，このとき現れる相似な二等辺三角形に着目しましょう．



解答 正五角形 ABCDE の1辺の長さを a，対角線の長さを x とおき，対角線 AC と BE との交点を F とする．

△BEC と △BCF において，∠B は共通であり

$$\angle BEC=\angle BCF=36^\circ$$

（∵ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角）

であるから，2つの三角形は相似であり

$$BE:BC=BC:BF$$

$$x:a=a:BF,\quad BF=\frac{a^2}{x} \quad \cdots\cdots ①$$

また，△BEC，したがって △BCF は二等辺三角形であるから，CF＝CB＝a であり，さらに

$$FE=CF=a \quad \cdots\cdots ②$$

となる．

BE＝x と①，②より

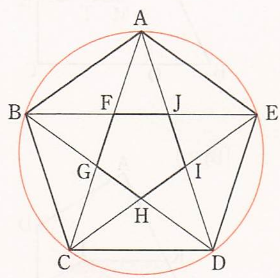
$$\frac{a^2}{x}+a=x,\quad x^2-ax-a^2=0$$

ここで $x>0$ だから

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a,\quad BF=\frac{a^2}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

である．

さらに，右図において



$$FJ=BE-(BF+JE)=BE-2BF$$

$$=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$$

であり，

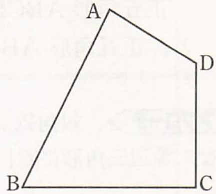
[正五角形 FGHIJ]：[正五角形 ABCDE]

$$=FJ^2:AB^2=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}a\right)^2:a^2=\mathbf{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}:1}$$

となる．

B.525

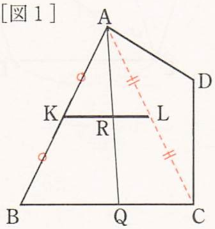
四辺形ABCDの辺AD，BC上を点P，Qがそれぞれ動くとき，線分PQの中点Rが動く範囲を図示せよ。



アプローチ 2点が動く問題では，まず1点を固定して考えてみるのが定石です。

解答 まず，PをAに固定して，Qだけを動かす。このとき，AB，ACの中点をそれぞれK，Lとおくと，中点連結定理より，Rは線分KL全体を動く。[図1]

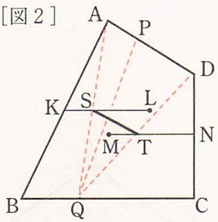
[図1]



同様に，点PをDに固定したとき，DB，DCの中点をそれぞれM，Nとおくと，中点連結定理より，Rは線分MN全体を動く。

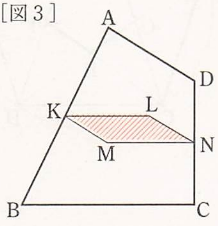
次に，BC上にQを固定してPだけを動かす。AQ，DQの中点S，Tはそれぞれ線分KL，MN上にあるが，PをAD上で動かすとき，PQの中点Rはやはり中点連結定理より線分ST上を動く。[図2]

[図2]



さらに，Qを動かすと，線分STは線分KMから線分LNまで平行に動くから，結論として，Rは平行四辺形KMNLの内部および周上（[図3]の斜線部分）を動く。

[図3]



［注］ 1° 四辺形KMNLが平行四辺形であることは

$$KL=MN=\frac{1}{2}BC, \quad KL/\!/MN/\!/BC$$

から，簡単にわかる。

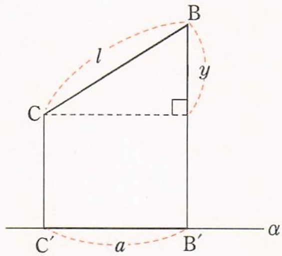
2° 平行四辺形KMNLの面積はAD，BCの長さとこれらのなす角，または，BCの長さとA，DからBCまでの距離の差がわかると計算できる。

B.526

平面 α の上方に正三角形 ABC があり，A, B, C から α に下した垂線の足を A′, B′, C′ とすると，$B'C'=a$, $C'A'=b$, $A'B'=c$ である．正三角形 ABC の面積を求めよ．

アプローチ 最初は正三角形 ABC の 1 辺の長さと，a，b，c および A, B, C から α までの距離の間の関係式を考えます．

解答 A，B の平面 α からの高さは，C の高さより x, y だけ高い (低い場合には，x，y は負となる) とする．このとき，AB の高低差は $|x-y|$ である．



正三角形 ABC の一辺の長さを l とするとき，

$$\begin{cases} y^2+a^2=l^2 & \cdots\cdots ① \\ x^2+b^2=l^2 & \cdots\cdots ② \\ |x-y|^2+c^2=l^2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．

①＋②－③　より

$$2xy+a^2+b^2-c^2=l^2$$

$$\therefore\ 4x^2y^2=(l^2-a^2-b^2+c^2)^2$$

さらに，①，②を代入して x^2，y^2 を消去して

$$4(l^2-b^2)(l^2-a^2)=(l^2-a^2-b^2+c^2)^2$$

$$3l^4-2(a^2+b^2+c^2)l^2-(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)=0 \cdots\cdots ④$$

◀ l^2 に関する 2 次方程式となる．

を得る．

BC≧B′C′ などより　$l\geqq a$，$l\geqq b$，$l\geqq c$ だから，$l^2\geqq\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$ であり，④を l^2 の 2 次方程式とみなしたとき，大きい方の解が求める l^2 に等しい．

これより，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}l^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{a^2+b^2+c^2+2\sqrt{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}\right\}}$$

となる．

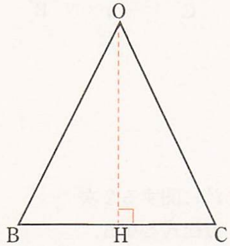
B.527

四面体 OABC において

$$OA=OB=OC=a, \quad BC=b, \quad \angle BAC=90°$$

である．このような四面体 OABC の体積 V の最大値を求めよ．

アプローチ まず四面体の高さ，ここでは O から △ABC までの距離を考えます．変化するのは，△ABC の面積だけです．



解答 O から △ABC に下した垂線の足を H とする．△OAH, △OBH, △OCH はすべて直角三角形であって，

$$OA=OB=OC(=a), \quad OH \text{ は共通}$$

であるから，

$$\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$$

$$\therefore \quad AH=BH=CH \qquad \cdots\cdots①$$

である．

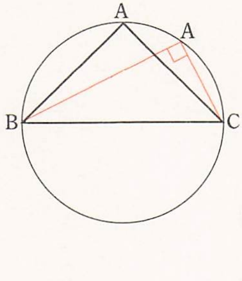
①より，H から A, B, C までの距離が等しいから，H は △ABC の外心である．

一方，△ABC は　$\angle A=90°$　………②

の直角三角形だから，その外心は斜辺 BC の中点である．つまり，H は BC の中点である．よって，

$$OH=\sqrt{OB^2-\left(\frac{1}{2}BC\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}$$

であり，



$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH=\frac{1}{6}\sqrt{4a^2-b^2}\cdot\triangle ABC \quad \cdots\cdots③$$

となる．

また，②より，A は BC$=b$ を直径とする円周上を動くから，△ABC の面積は A が弧 BC の中点にあるとき最大となり，その値は $\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}b^2$ である．

③に戻ると，V の最大値は

$$\boldsymbol{\frac{1}{24}b^2\sqrt{4a^2-b^2}}$$

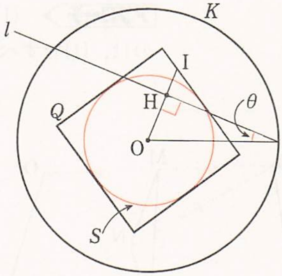
である．

B.528

原点Oを中心とする半径2の円Kの内部に，一辺の長さが2で対角線の交点がOとなるような正方形ABCDをとる．K上の点Pにおいて，線分POと角θで交わる2本の半直線を引く．このとき，PがK上のどのような位置にあっても，これら2本の半直線が正方形ABCDを通るようなθの最大値を求めよ．

アプローチ K上でPを動かす代りに，Pを固定して，Oを中心として正方形を回転する方が考えやすいでしょう．

解答 正方形ABCDの周をQとする．



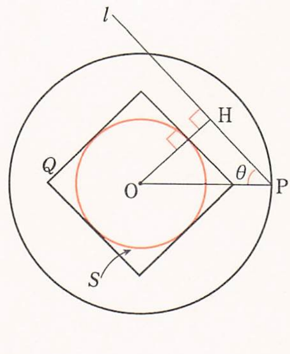
QとOPの位置関係に着目するとき，PをK上で動かすことと，Oを中心として，Qを回転することは同じであるから，以後，OPを固定して考える．

Pにおいて，線分POと角θで交わる半直線の1本lにOから下した垂線の足をHとし，Oを中心とし，半径1の円をSとする．

$OH \leqq 1$ のとき，明らかにlとSは共有点をもつ．よってOHの延長がSと交わる．また，QはSの外側にあるから，OHの延長は当然，Qとも交わり，その交点をIとおけば，右図のような関係になっている．OとIがlに関して，反対側にあるから，lは正方形ABCDを通る．

◀OH=1 のときには，IとHは一致する．

一方，$OH>1$ のときには，Qの一辺がlと平行となるように回転すると，lはQを通らない．



以上のことより，PがK上のどのような位置にあっても，PにおいてPOと角θで交わる2直線が，つまりはlが正方形ABCDを通る条件は

$$OH \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．$OH=1$ のとき，$\theta=30°$ であるから，①は

$$\theta \leqq 30°$$

と同値である．よって，求めるθの最大値は **30°** である．

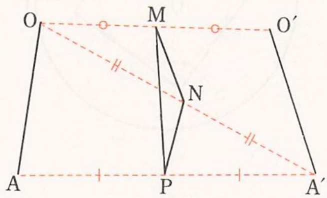
B. 529

同一平面上に2つの三角形△ABC, △A′B′C′があり，それぞれの外接円の半径はともに1であるとする．この2つの外接円の中心を結ぶ線分の中点をM，線分AA′, BB′, CC′の中点を，それぞれP, Q, Rとする．

(1) MP≦1, MQ≦1, MR≦1となることを示せ．

(2) もし△PQRが鋭角三角形でその外接円の半径が1となるならば，点Mはこの外接円の中心と一致することを示せ．更にこのとき△ABC, △A′B′C′, △PQRはすべて合同となることを示せ．

アプローチ (1)では，中点連結定理が役立ちます．(2)の状況が起こるのは，(1)ですべての等号が成り立つときに限るのですが…….



解答 (1) △ABC, △A′B′C′の外接円の中心をO, O′とする．

OA′の中点をNとし，△A′OA, △OA′O′に中点連結定理を適用すると

$$\mathrm{NP} /\!/ \mathrm{OA},\ \mathrm{NP}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots①$$

$$\mathrm{MN} /\!/ \mathrm{O'A'},\ \mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{O'A'}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots②$$

これより，

$$\mathrm{MP} \leqq \mathrm{MN}+\mathrm{NP}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \quad \cdots\cdots③$$

③において，MP=1 となるのは，M, N, Pが同一直線上に並ぶとき，つまり①，②と合わせると

$$\mathrm{OA} /\!/ \mathrm{MP} /\!/ \mathrm{O'A'} \quad \cdots\cdots④$$

のときに限る．

MQ≦1, MR≦1も全く同様に示すことができる．なお，これらの不等式において，等号が成り立つのはそれぞれ

$$\mathrm{OB} /\!/ \mathrm{MQ} /\!/ \mathrm{O'B'},\ \mathrm{OC} /\!/ \mathrm{MR} /\!/ \mathrm{O'C'} \quad \cdots\cdots⑤$$

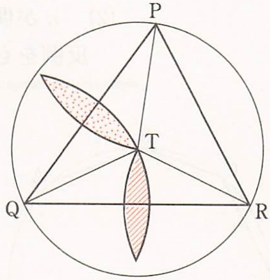
のときに限る．■

(2) △PQRの外接円の中心をTとする．△PQRは鋭角三角形であるから，中心角∠PTQ, ∠QTR, ∠RTPは180°より小さい．これらの角の和が360°

であることと合わせると少なくとも2つは90°より大きいから，ここでは，

$\angle PTQ>90°,\ \angle QTR>90°$　………⑥

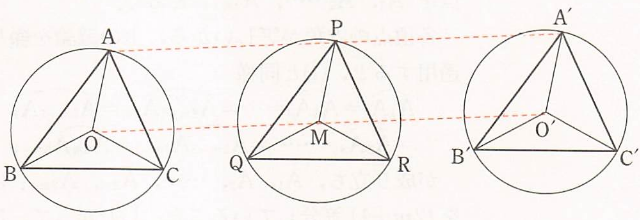
と仮定する．



このとき，P，Qからの距離がいずれも1以下である点全体は，P，Qを中心とする半径1の円の共通部分(右図の点線部分)であるが，⑥のもとでは角PTQに含まれる．同様にQ，Rからの距離がいずれもが1以下の点全体(斜線部分)は，角QTRに含まれる．よって，これらの共通部分，つまりP，Q，Rからの距離がいずれも1以下である点は△PQRの外心Tに限られる．一方，(1)で示した通り，MはP，Q，Rからの距離が1以下であるから，結局，TとMは一致しなければならない．このとき，MP，MQ，MRは△PQRの外接円の半径で，

$$MP=MQ=MR=1$$

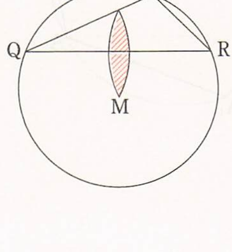
であるから，④と⑤が成り立つことになる．



よって，平行移動によってOA，OB，OCをそれぞれO′A′，O′B′，O′C′およびMP，MQ，MRに重ねることができ，結果として△ABCを△A′B′C′，△PQRに重ねることもできる．これより，

$$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'\equiv\triangle PQR$$ ■

［注］(2)において，△PQRが鋭角三角形であるという条件を省くことはできない．△PQRの外接円の半径が1であっても，△PQRが鈍角三角形ならば，P，Q，Rからの距離がいずれも1以下である点が外接円の中心とは限らないことは，右図から明らかである．この事実は，一般に△DEFを内部または周上に含む最小の円が



鋭角または直角三角形では，△DEFの外接円

鈍角三角形では，最長辺を直径とする円

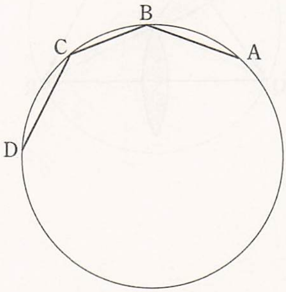
であることと関連している．

B. 530

円に内接する n 角形 $(n \geqq 3)$ の各頂点の角が等しいとする．

(1)　n が奇数であるとき，正 n 角形であることを示せ．

(2)　n が偶数であるとき，必ずしも正 n 角形でないことを反例をもって示せ．



解答　円周上に A，B，C，D がこの順に並び，

$$\angle ABC = \angle BCD$$

が成り立つのは，

$$\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{BCD}$$

さらに，$\overset{\frown}{BC}$ は共通に含まれていることに注意すると

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つときである．この事実を利用して，(1)，(2)を考える．

(1)　$n=2m+1$ (m は正の整数) とし，n 角形の頂点を A_1，A_2……，A_{2m+1} とおく．

各頂点の内角が等しいから，上の議論を繰り返し適用すると，①と同様

$$\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_3A_4} = \cdots = \overset{\frown}{A_{2m-1}A_{2m}} = \overset{\frown}{A_{2m+1}A_1}$$
$$= \overset{\frown}{A_2A_3} = \cdots\cdots = \overset{\frown}{A_{2m-2}A_{2m-1}} = \overset{\frown}{A_{2m}A_{2m+1}}$$

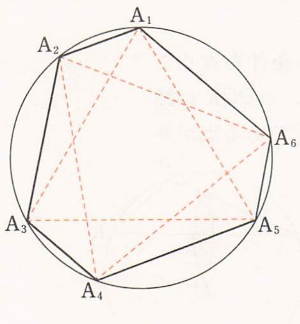
が成り立ち，A_1，A_2，……，A_{2m}，A_{2m+1} は円周を $(2m+1)$ 等分していること，したがって，これらは正 $(2m+1)$ 角形の頂点であることがわかる．■

(2)　$n=2m$　(m は 2 以上の整数) のとき，(1)と同様に考えると，

$$\overset{\frown}{A_1A_2} = \overset{\frown}{A_3A_4} = \cdots\cdots = \overset{\frown}{A_{2m-1}A_{2m}} (= \overset{\frown}{A_1A_2}) \quad \cdots\cdots②$$
$$\overset{\frown}{A_2A_3} = \overset{\frown}{A_4A_5} = \cdots\cdots = A_{2m}A_1 (= \overset{\frown}{A_2A_3}) \quad \cdots\cdots③$$

が成り立つ．

しかし，②，③からは，A_1，A_3，……，A_{2m-1} また A_2，A_4，…A_{2m} がそれぞれ円周を m 等分していることしか導かれない．実際，A_2 を $\overset{\frown}{A_1A_3}$ の中点以外にとると，条件を満たすが，正 $2m$ 角形ではない $2m$ 角形が得られる．左に $n=2m=6$ の場合の反例を図示しておく．■



C. 探究篇

本篇では，数学Aに登場する数学的概念のうち，

教科書や中級の参考書では，さりげなく通り過ぎている（あるいは，無自覚に飛ばしている）もの

や

「指導要領」の制約のために，本来の自然な発展的記述を中断されているもの

を，意欲高い読者のために，項目別にまとめたものである．

ところによっては，理解に困難を感ずることもあるだろうが，あまり神経質にならずに，何回も繰り返して読んでもらいたい．自分の興味のある項目を，ひろい読みするだけでも，もちろん良い．

C.1 対称式と交代式

1 $f(x, y)$ を x と y の多項式とする．x と y を入れ換えても式の形が変わらないとき，すなわち，$f(x, y)$ と $f(y, x)$ が同じ多項式であるとき，$f(x, y)$ を x と y の **対称式** という．また，$f(y, x)$ が $-f(x, y)$ と一致するとき，$f(x, y)$ を x と y の **交代式** という．

$$f(x, y) \text{ は対称式} \iff f(y, x)=f(x, y)$$

$$f(x, y) \text{ は交代式} \iff f(y, x)=-f(x, y)$$

たとえば，$x+y$，xy は対称式，x^2-y^2 は交代式である．次の事実は，経験的に知っているだろう．

[定理 1] (1) 対称式 $f(x, y)$ は，$x+y$ と xy の多項式として表せる．
(2) 交代式 $f(x, y)$ は，ある対称式 $g(x, y)$ を用いて，$f(x, y)=(x-y)\cdot g(x, y)$ と表せる．

証明：(1) たとえば 1 次式

$$f(x, y)=ax+a'y$$

が対称式となるための条件は $ax+a'y=ay+a'x$
すなわち $a=a'$ であり，このとき

$$f(x, y)=a(x+y)$$

となる．また 2 次式

$$f(x, y)=ax^2+bxy+a'y^2$$

が対称式となるための条件は，

$$ax^2+bxy+a'y^2=ay^2+byx+a'x^2$$

すなわち $a=a'$ であり，このとき，

$$f(x, y)=a(x^2+y^2)+bxy$$

となる．同様に

$$f(x, y)=ax^3+bx^2y+b'xy^2+a'y^3$$

が対称式となるための条件は，$a=a'$，$b=b'$ であり，このとき

$$f(x, y)=a(x^3+y^3)+bxy(x+y)$$

となる．同様に，一般に対称式 $f(x, y)$ は

$$xy,\ x+y,\ x^2+y^2,\ x^3+y^3,\ x^4+y^4,\ \cdots\cdots$$

の多項式として表せる．そこで次に，x^n+y^n $(n=1, 2, \cdots)$ を

$x+y$ と xy で表すことを考えよう．ところが

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}+y^{n-1})-xy(x^{n-2}+y^{n-2})$$

であるから，x^n+y^n を $x+y$ と xy で表すには，$x^{n-1}+y^{n-1}$ と $x^{n-2}+y^{n-2}$ を $x+y$ と xy で表しておけばよい．この作業をくり返せば次数が次第に下がり，結局 x^2+y^2 と $x+y$ を $x+y$ と xy で表すという自明の問題に帰する．

以上により(1)が証明された．

(2) $f(x,\ y)=-f(y,\ x)$ に $y=x$ を代入すると

$$f(x,\ x)=-f(x,\ x) \qquad \therefore\ f(x,\ x)=0$$

となる．したがって，因数定理により，

$$f(x,\ y)=(x-y)\,g(x,\ y)$$

のように因数分解できる．このとき $g(x,\ y)$ が対称式の定義を満たすことは明らかである．これで(2)が示された．■

ここで $a=x+y$，$b=xy$ とおくと，a，b は x，y を2根とする2次方程式 $t^2-at+b=0$ の係数となる．また $(x-y)^2$ を a と b で表したもの a^2-4b が，2次方程式の **判別式** であった．

2 x，y，z の対称式・交代式も同様に定義される．すなわち，x，y，z の多項式 $f(x,\ y,\ z)$ において，どの2つの変数を入れ換えても式の形が変わらないとき対称式といい，符号が変わるときに交代式という．また定理1に対応して

[定理2] (1) 対称式 $f(x,\ y,\ z)$ は，$x+y+z$，$xy+yz+zx$，xyz の多項式として表せる．
(2) 交代式 $f(x,\ y,\ z)$ は，ある対称式 $g(x,\ y,\ z)$ を用いて，$f(x,\ y,\ z)=(x-y)(y-z)(z-x)g(x,\ y,\ z)$ と表せる．

が成立する．ここで $a=x+y+z$，$b=xy+yz+zx$，$c=xyz$ は x，y，z を3根とする3次方程式の係数となる．なお，$(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$（これは，x，y，z の対称式）を a，b，c で表したものを，3次方程式の判別式という．

C.2 連立方程式の同値変形

方程式を解く技術をいくつか習得した段階で，“方程式を解く”とはどういう事だったのかを反省してみよう．例えば，

$$(*)\begin{cases}x+y=2\\x-y=4\end{cases}$$

の解が

$$(**)\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$$

であるとは，$(*)$を満たす x，y の値が$(**)$で定められるという意味であると，初めは教わったはずである．だが，もう一歩ふみこんで，$(**)$は，$(*)$をそれと同値な，より簡潔な表現になおしたものであると理解したい．つまり，“同値変形”を用いて与えられた方程式を簡略化することを，“解く”というのである（$(**)$は$(*)$と同値な方程式のうちで，最も簡単なものである）．すると問題は，方程式を解くためにどのような同値変形があるかということになる．

以下において，連立方程式を解くための代表的な2つの技術である「加減法」と「代入法」をとりあげてみる．

1 加減法

$ad-bc \neq 0$ のとき，

$$\begin{cases}F(x,\ y)=0 \quad \cdots\cdots ①\\G(x,\ y)=0 \quad \cdots\cdots ②\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}aF(x,\ y)+bG(x,\ y)=0 \quad \cdots\cdots ③\\cF(x,\ y)+dG(x,\ y)=0 \quad \cdots\cdots ④\end{cases}$$

が成立する．

証明： ①，② $\Longrightarrow$ ③，④ は明らかである．逆の ③，④ $\Longrightarrow$ ①，② を示すには，

$d\times$③$-b\times$④ および $c\times$③$-a\times$④

を作り，$ad-bc \neq 0$ であるので，これで割ればよい．■

上記において，a，b，c，d は定数でなく x，y を含む関数であってもよい．大切なことは「$ad-bc \neq 0$」である．①，②を解くためには，a，b，c，d を適当に選んで，③，④が簡単な形に

なるようにするのが，**加減法** の原理である．

ところで①，②をそれぞれ xy 平面上の曲線の方程式とみなすとき，①かつ②の解は，これらの曲線の交点の座標にほかならない．したがって，①，② $\Longleftrightarrow$ ③，④ という同値性は，2曲線①，②の交点と2曲線③，④の交点が一致することを意味する．

2 代入法

これは，一方の未知数，たとえば y を消去して作られる方程式が解けるだろうという見込みの下で実行される．

たとえば，

$$F(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を y に対する単独の方程式と見なして，これを解き

$$y=f(x) \qquad \cdots\cdots ①'$$

とする．そして，①′を

$$G(x,\ y)=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

に代入して，

$$G(x,\ f(x))=0 \qquad \cdots\cdots ②'$$

を作る．

これを解いて x を得ることができれば，後はこの x の値を①′に代入して，y の値を得るのである．

すなわち，

$$\begin{cases} y=f(x) & \cdots\cdots ①' \\ G(x,\ y)=0 & \cdots\cdots ② \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=f(x) & \cdots\cdots ①' \\ G(x,\ f(x))=0 & \cdots\cdots ②' \end{cases}$$

が成立する．証明は難しくないだろう．

上記の方法を実行する際，①′のように y が x の式で表されるときは，x の値を決めれば y の値が決まるので問題が起きないが，そうでない場合は厄介な問題が生ずることがある．

さて，「2つの未知数を決定するには2本の方程式を要する」という経験は，この代入法に即して考えれば，“代数的に”諒解される．また未知数が3個以上のときも，全く同様である．これは，「2元連立方程式の解は2曲線の交点である」という幾何的な理解と表裏をなすものである．

C.3 循環小数と有理数

$\dfrac{1}{3}$ を小数で表すと，0.3333…… と同じ数が無限に続くことは，良く知られた事実である．一般に，ある整数を，整数 $m\,(m>0)$ で割ったときの余りは，

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m-1$$

の m 通り以外にはないので，有理数 $\dfrac{n}{m}$ を小数で表したとき，有限小数にならない場合には，どんなに長くても，小数点以下に，0 以外の数が現れてからせいぜい $m-1$ 桁以内で必ず循環が始まる．たとえば，

$$\frac{1}{6}=0.16666\cdots\cdots,\quad \frac{1}{7}=0.142857142857 14\cdots\cdots$$

という具合である．これらを，記号 $\dot{\ }$ を用いて，それぞれ

$$0.1\dot{6},\quad 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

と表すのは，昔からの習慣である．

我々にとって興味深いのは，上に述べたことの逆，すなわち

［定理］ 有限小数および循環小数は，必ず有理数である．

が成り立つことである．この対偶は，「無理数は循環しない無限小数である」となる．この定理の厳密な証明は，「数学Ⅲ」で学ぶ手法によることになるが，「数学A」の段階では，次に示すような簡略な理解でよいだろう．

$$x=1.23232323\cdots\cdots=1.\dot{2}\dot{3}$$

のとき

$$\begin{array}{rrl} & 100x= & 123.232323\cdots\cdots \\ -) & x= & \ \ \ \ 1.232323\cdots\cdots \\ \hline & 99x= & 122 \end{array} \qquad \therefore\quad x=\frac{122}{99}$$

なお，有限小数は，次のように 9 が永遠に続く無限循環小数の一種と考えることもできる．たとえば，

$$1=0.99999\cdots\cdots=0.\dot{9}$$

ひょっとすると数Aの学習を終えたばかりの読者に，この事実は，奇妙にうつるかもしれない．この疑問は，やがて「極限値」についての理解が得られたとき，さしあたり氷解するであろう．

C.4 約数と倍数

a, b, c を整数とするとき，次の2つの定理は直観的にほとんど明らかであり，ふつう，証明なしに用いている．

> [定理1]　c は a, b の公倍数
> $\Longrightarrow$　c は a と b の最小公倍数の倍数
>
> [定理2]　a と b が互いに素のとき，
> ac は b の倍数　$\Longrightarrow$　c は b の倍数

上記の定理は，a, b, c が x の **整式** の場合にも成立し，証明もほとんど同様に行なえる．ここでは整数の場合に証明しよう．

定理1の証明：　a と b の最小公倍数を m とし，c を m で割った商を q，余りを r とすると，

$$c=mq+r,\ 0\leqq r<m$$

が成立する．$r=0$ を示す．c も m も，a と b の公倍数だから，$r=c-mq$ は a と b の公倍数である．ところが r は m (＝最小公倍数) より小さいから，$r=0$ でなければならない．∎

整式の場合は，「$0\leqq r<m$」のかわりに「r の次数 $<$ m の次数」とすればよい．

定理2の証明：　ac は a と b の公倍数であるから，定理1によって，ac は a と b の最小公倍数 m の倍数である．ところが，a と b の最大公約数は1であるから

$$ab=1\cdot m=m$$

よって，ac は ab $(=m)$ の倍数である．したがって c は b の倍数である．∎

合同式(☞ A1.E5)を用いると，定理2は次のように表現できる．

> [定理2′]　a と b が互いに素のとき，
> $ac\equiv 0\pmod{b}$　$\Longrightarrow$　$c\equiv 0\pmod{b}$

これは，合同式の両辺を a で割る操作に相当する．この定理か

らさらに次の定理が得られる．

> **[定理 3]**　a と b が互いに素のとき，
> $$ax \equiv c \pmod{b}$$
> を満たす整数 x が存在する．

証明：　まず

$$x_1 \not\equiv x_2 \pmod{b} \implies ax_1 \not\equiv ax_2 \pmod{b} \quad \cdots\cdots ①$$

を示す．かりに $ax_1 \equiv ax_2 \pmod{b}$ とすると，

$$a(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{b}$$

となるから，定理 2′ により，

$$x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{b} \qquad \therefore \quad x_1 \equiv x_2 \pmod{b}$$

でなければならない．これで①が示された．

さて，b 個の数

$$0,\ a,\ 2a,\ \cdots\cdots,\ (b-1)a \quad \cdots\cdots ②$$

を考えよう．①により，これらの数のうちどの 2 個も，b を法として合同でない．すなわち，これらの数を b で割った余りはすべて異なる．しかるに b で割った余りは

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ b-1 \quad \cdots\cdots ③$$

のどれかであるから，②の各数を b で割ると，③の各数がちょうど 1 回ずつ出現する．特に，c を b で割った余りに等しいものがある．■

この定理 3 は，次のような形に表現しなおすことができる．

> **[定理 3′]**　a と b が互いに素のとき，
> $$ax + by = c$$
> を満たす整数 x，y が存在する．

この定理は方程式の整数解 x，y の「存在」を主張しているが解の求め方については何も語っていない．これについては

☞ C.5

C.5 互除法

整数や整式の最大公約数を求める簡単な方法に，ユークリッドの互除法と呼ばれるものがある．

例1　91 と 65 の最大公約数を求める．

$91\div65=1\cdots26$　⬅ 余り 26 を求める．

$65\div26=2\cdots13$　⬅ さっき割る側にあった 65 を余りの 26 で割る．

$26\div13=2\cdots0$

最後の式で 26 を割り切った数「13」が，求める最大公約数である．

例2　x^3-x^2+x-1 と x^2-4x+3 の最大公約数を求める．

x^3-x^2+x-1 を x^2-4x+3 で割ると，

商が $x+3$ で，余りが $10x-10$．

x^2-4x+3 を $10x-10$ で割ると，

商 $\dfrac{1}{10}x-\dfrac{3}{10}$ がたって割りきれる．

最後の式で x^2-4x+3 を割り切った $10x-10$ が求める最大公約数である．

もちろん，最大公約数は $x-1$ であるといってもよい．

上記の方法は，次の原理に基いている．

[定理]　a を b で割った余りを r とすると，
a と b の最大公約数 $=$ b と r の最大公約数

証明：　a を b で割った商を q とすると

$a=bq+r,\qquad r=a-bq$

が成立する．第1式から「b と r の公約数は a の約数である」と分かり，第2式から「a と b の公約数は r の約数である」と分かる．したがって，

c は a と b の公約数 $\Longleftrightarrow$ c は b と r の公約数

が成立する．特に，a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数と一致する．∎

この定理を用いると，例 1 においては，

91 と 65 の最大公約数

＝65 と 26 の最大公約数

＝26 と 13 の最大公約数＝13

となるわけである．

また互除法の原理は，a と b が互いに素のとき，

$$ax+by=c \qquad \cdots\cdots ①$$

の整数解を見出すのにも有効である（☞ C. 4）．

$a>b$ とする．a を b で割った商を q，余りを r とすると，$a=bq+r$ が成立するから，①は

$$(bq+r)x+by=c$$

$$\therefore \quad rx+b(y+qx)=c$$

となり，ここで

$$z=y+qx$$

と置くと，

$$rx+bz=1$$

となる．

次に b を r で割って……という具合に，互除法と同じ手続を実行すると，最終的に自明な方程式に行き着く．

例 3　$31x+7y=2 \qquad (31=7\cdot4+3)$

$3x+7z=2 \quad (z=y+4x) \quad (7=3\cdot2+1)$

$3u+\ z=2 \quad (u=x+2z) \qquad \cdots\cdots ②$

②から

$$z=-3u+2 \qquad (u \text{ は任意の整数})$$

となり，順次さかのぼって，

$$x=u-2z=7u-4$$

$$y=z-4x=-31u+18$$

を得る．

②において，z の係数が 1 となったことが重要である．この「1」は，31 と 7 の最大公約数である．

C.6 等差数列と等比数列

初項が 2，公比が 2 の等比数列

$$\{a_n\}=\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots\cdots\}$$

を，累乗の型に表現してみると

$$\{a_n\}=\{2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ \cdots\cdots\}$$

のように指数 b_n の列は，

$$\{b_n\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots\}$$

という等差数列になる．

ところでこの等差数列を，初項より前にさかのぼって延長するならば

$$\{\cdots\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots\}$$

とするのが自然である．

元の等比数列については，

$$\left\{\cdots\cdots,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots\cdots\right\}$$

となる．(数列 $\{b_n\}$ においては，漸化式

$$b_{n+1}-b_n=1$$

数列 $\{a_n\}$ においては，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$$

が成り立ち続けるからである！)

そこで，このように延長した場合にも，a_n と b_n との間に成り立っていた規則

$$a_n=2^{b_n}$$

が成り立つと期待すれば，

$$1=2^0,\ \frac{1}{2}=2^{-1},\ \frac{1}{4}=2^{-2},\ \frac{1}{8}=2^{-3}$$

が得られる．

聡明な読者は，$2^{\frac{1}{2}}$ や $2^{\frac{1}{3}}$ が何を表すべきか，この議論をもとにすれば，じきに察しがつくであろう．

C.7 調和数列

高校数学の中に正式には登場しないが，等差数列，等比数列と並んで，“名前をもつ”数列に調和数列がある．

> **[定義]** 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ が等差数列をなすとき，数列 $\{a_n\}$ は **調和数列** をなすという．

最も典型的な調和数列は，単位分数（分子が1の分数）の列

$$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\cdots\right\}$$

である．

与えられた2数 a，b に対し，

数列 $\{a,\ x,\ b\}$ が等差数列（算術数列）をなすような x すなわち

$$x=\frac{a+b}{2}$$

を，a と b の相加平均（算術平均，等差中項）

数列 $\{a,\ x,\ b\}$ が等比数列（幾何数列）をなすような x すなわち

$$x=\sqrt{ab}$$

を，a と b の相乗平均（幾何平均，等比中項）

と呼んだように，

数列 $\{a,\ x,\ b\}$ が調和数列をなすような x

すなわち

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad \therefore \quad x=\frac{2ab}{a+b}$$

という x を，a と b の調和平均（調和中項）と呼ぶ．

$a>0$，$b>0$ のとき，この3つの平均の間には，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b}$$

という不等式が成り立つ．

C.8 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$ と来て，その次の公式は？

高校の教科書に登場する求和の公式は，標題にあげた程度であるが，“$\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めよ”といわれたら，読者はどうするであろうか？

$\sum_{k=1}^{n} k^2$ や $\sum_{k=1}^{n} k^3$ の公式の導き方を完璧に修得している人なら，

$$(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$$

の両辺を $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ について加え合わせた式

$$(n+1)^5-1=5\sum_{k=1}^{n} k^4+10\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+10\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$+5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

から

$$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)$$

を導くことは難しくないであろう．このように必要に応じて，

$$\sum_{k=1}^{n} k,\ \sum_{k=1}^{n} k^2,\ \sum_{k=1}^{n} k^3,\ \sum_{k=1}^{n} k^4,\ \sum_{k=1}^{n} k^5,\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(*)$$

の公式をいくらでも作っていくことができる．こうして $f(k)$ が k の多項式であれば，$\sum_{k=1}^{n} f(k)$ を計算して n の多項式の形に表現できることがわかる．

なお，$(*)$ のかわりに

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

を基本として，$\sum_{k=1}^{n} k^4$ の公式を作ることもできる．

C.9 差分と和分

与えられた数列 $\{a_n\}$ に対し,

$$b_n = a_{n+1} - a_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義される数列 $\{b_n\}$ を, $\{a_n\}$ の階差数列と呼んだ.

数列 $\{a_n\}$ に対し,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義される数列 $\{S_n\}$ に対しては, 高校では定着した呼び名がないので, ここで仮に, 総和数列と呼ぶことにしよう. 与えられた数列 $\{a_n\}$ に対し, その総和数列を対応させるには, 上に示したように, $\sum$ 記号が使えるのだが, 階差数列を表すには, 特別の記号がないので, ここで仮に

$$\varDelta a_n = a_{n+1} - a_n \qquad (\varDelta \text{ はギリシア文字デルタ})$$

と書くことにする.

するとよく知られている公式

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1, \quad S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$$

は, それぞれ

$$\sum_{n=1}^{n} (\varDelta a_k) = a_{n+1} - a_1, \quad \varDelta\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = a_{n+1}$$

と表すことができる. 精神を集中してボーッと見ると(?!), これは微積分の関係

$$\int_1^x f'(t)dt = f(x) - f(1), \quad \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x)$$

と似ている. より詳しくいえば,

$$\begin{cases} \text{階差をとるという操作は　微分} \\ \text{総和をとるという操作は　積分} \end{cases}$$

と対応している. このような意味で,

$$\begin{cases} \text{階差をとるという操作を　差分} \\ \text{総和をとるという操作を　和分} \end{cases}$$

と呼び, そして差分や和分を, ある意味で極限化した概念が, それぞれ微分, 積分なのである.

C.10 線型漸化式の解法 (0)

第3章で学んだ漸化式は，より一般的に述べると，次のようになる．$F(x,\ y)$ を与えられた2変数関数とするとき，

$$a_{n+1}=F(a_n,\ n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

を，数列 $\{a_n\}$ の満たす隣接2項間漸化式と呼ぶ．たとえば

例1　$F(x,\ y)=2x+1$　のときは　$a_{n+1}=2a_n+1$
例2　$F(x,\ y)=2x+y$　のときは　$a_{n+1}=2a_n+n$
例3　$F(x,\ y)=x(y+1)$　のときは　$a_{n+1}=(n+1)a_n$
例4　$F(x,\ y)=x^2-3x$　のときは　$a_{n+1}={a_n}^2-3a_n$

このうち，例1～3のように，a_{n+1} が a_n の1次式で表されるものを，特に線型漸化式と呼ぶ．p. 107 で

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$
ただし，$p,\ q$ は定数

について学んだように，線型漸化式については，一般項を求める(つまり，a_n を n の簡単な式で表す)ことができる場合が多い．そこで典型的なものをいくつか解説する．

そのための準備として，同次型，非同次型ということばを導入しておこう．

上の例3，例4のように $F(x,\ y)$ の式に，x を含まない項(x に関する定数項)が現れないときは，$F(x,\ y)$ を x に関する同次式という．このときは漸化式

$$a_{n+1}=F(a_n,\ n) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を **同次型** と呼ぶ．これに対し例1，例2の漸化式

$$a_{n+1}=2a_n+1,\ a_{n+1}=2a_n+n$$

では，右辺に1や n があるため，**非同次型** という．

なお，例1，例4のように，a_{n+1} が a_n だけの式で表せるときには，$(*)$ のかわりに，1変数関数 $f(x)$ を考えて

$$a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,)\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(**)$$

と表してもよい．例1の場合は，$f(x)=2x+1$，例4の場合は $f(x)=x^2-3x$ である．

C.11 線型漸化式の解法 (1)

—— $a_{n+1}=pa_n+q(n)$ 型

線型２項間漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+q(n) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots(*)$$

$\begin{cases} p\ \text{は0でない与えられた定数} \\ q(n)\ \text{は与えられた}n\text{の関数} \end{cases}$

という漸化式の一般項を求めよう．まず，

ｉ） $p=1$

という特別の場合については，上の漸化式は数列$\{a_n\}$の階差数列が$\{q(n)\}$であることを意味しているので，a_nは

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}q(k), \qquad n\geqq 2$$

と計算できる．

ii） $p\neq 1$

の場合は，p.109で述べたように，与えられた漸化式の両辺をp^{n+1}で割り，数列$\left\{\dfrac{a_n}{p^n}\right\}$について，ｉ）のタイプの漸化式に帰着させる〔解法１〕と，与えられた漸化式を満足する数例の具体例(特殊解)を１つ見つけ，それを利用して$q(n)$を消去した同次型の漸化式に帰着させる〔解法２〕がある．($q(n)$が特に良い形をしている場合には，B.225に示したような第３の解法もある.)

このうち，〔解法１〕は，$q(n)$を欠いた同次型漸化式

$$a_{n+1}=pa_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

の一般解が

$$a_n=C\cdot p^n \qquad (C：任意定数)$$

であることをヒントとして，定数Cを未知の数列$\{b_n\}$に置きかえた形で求める．すなわち元の非同次型漸化式の求める一般項を

$$a_n=b_n\cdot p^n$$

とおくというものである．この意味で，この解法は定数変化法と呼ばれる．なお，$q(n)$がnの多項式(特に定数や１次式)の場合のように漸化式($*$)の特殊解が見つけられる場合には，〔解法２〕によるのが楽である．

C.12　線型漸化式の解法　(2)

—— $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n+r(n)$ 型

隣接3項間漸化式は，一般に，3変数関数 $F(x,\ y,\ z)$ を用いて

$$a_{n+2}=F(a_{n+1},\ a_n,\ n)$$

と表せるが，このようなもののうち，高校範囲で話題になるのは，

$$F(x,\ y,\ z)=px+qy$$
$$(p,\ q：定数)$$

という同次型のタイプ，つまり，

$$\boldsymbol{a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n}$$

という同次型のものにほとんど限られる．

これについては，その標準的な解法を，p.110 で述べたが，入試において最も頻繁に現れるのは，

$$\boldsymbol{p+q=1}$$

の場合である．この場合には，与えられた漸化式が

$$a_{n+2}=(1-q)a_{n+1}+qa_n \quad \cdots\cdots\cdots Ⓐ$$

となり，これが

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-q(a_{n+1}-a_n) \quad \cdots\cdots\cdots Ⓑ$$

や，

$$a_{n+2}+qa_{n+1}=a_{n+1}+qa_n \quad \cdots\cdots\cdots Ⓒ$$

という形に変形できることに注意しておく．さて，

$$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n-2n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

のような非同次型については，前項で述べたように特殊解が見つかれば，同次型に帰着できる．

この例では

$$n+2=2(n+1)+n-2n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

がつねに成り立つので(これを見抜くのは大変だが)，①−② により与えられた漸化式は，$b_n=a_n-n$ についての漸化式

$$b_{n+2}=2b_{n+1}+b_n$$

に帰着できる．



索　引

各項目の事項を記載してある箇所を示すのに，

A篇(基礎理論)に関しては，小節の番号と共に(　)内にページも記しておいた．

B篇(演習問題)，C篇(探究)に関しては，当該番号のみを示してある．

あ

アポロニウスの円　A3.4(164)
余りの定理　A1.10(12)
　(剰余定理)
一般項　A2.1(96)
因数定理　A1.10(12)
因数分解　A1.9(10)
　——の公式　A1.11(13)
裏　A1.18(32)
円周角　A3.1(158)
　——の定理　A3.1(158)
オイラーの分数式　B.125

か

階差数列　A2.6(102)
　——を用いて元の数列を復元　A2.6(103)
外心　A3.2(160)
回転　A3.5(166)
　——移動　A3.5(166)
加減法　C.2(256)
仮定と結論　A1.17(28)
加法(実数の——)　A1.3(4)
関数
　——の定義　A4.2(200)
　——のグラフ　A4.2(210)
偽　☞真と偽
幾何平均　☞相乗平均
奇数列の和　A4.2(190)
軌跡　A3.4(163)
規則的に並んだ数の和　A4.2(188)
逆　A1.18(31)
グラフ
　関数の——　A4.2(210)
結合法則
　実数の加法，乗法の—　A1.3(4)
　式の加法，乗法の——　A1.13(16)
結論　☞仮定と結論
減法
　実数の——　A1.3(4)
　整式の——　A1.8(9)
項　A2.1(96)
交換法則
　実数についての——　A1.3(4)
　式についての——　A1.13(16)
公差　A2.2(98)

交代式 C.1(254)
恒等式 A1.13(16)
合同
整数の間の—— A1.E5(39)
三角形の間の—— A3.1(156)
——条件(三角形の) A3.1(156)
——変換 A3.5(166)
公倍数 A1.9(10)
最小—— A1.9(10)
公比 A2.3(99)
公約数 A1.9(10)
最大—— A1.9(11), A4.2(201)
C.5(261)
互除法 C.5(261), A4.2(201)

さ

最大公約数 ☞ 公約教
最小公倍数 ☞ 公倍数
座標 A1.1(2)
差分と和分 C.9(266)
算術平均 ☞ 相加平均
算術命令 A4.1(187)
三平方の定理(ピタゴラスの定理)
A3.1(157)
シグマ記号(Σ) A2.4(100)
——の定義 A2.4(100)
——の計算規則 A2.4(100)
指数 A1.5(6)
——法則 A1.5(6)
自然数の累乗の和 A2.5(102)
実験
自然数列の和を
求めるための—— A4.2(192)
実数 A1.1(2)
重心(三角形の) A3.1(157)
十分条件 A1.17(29)
循環小数 A1.2(3)
——と有理数 C.3(258)
条件 A1.16(23)
——の否定・合成 A1.16(25)
条件つきの等式の証明 A1.13(17)
乗法
実数の—— A1.3(4)
整式の—— A1.8(9)
乗法の公式(展開の公式)A1.11(13)
剰余定理 ☞ 余りの定理
初項 A2.1(96)
除法
実数の—— A1.3(4)
整式の—— A1.10(11)
真 A1.16(23)
真と偽 A1.16(23)
真理集合 A1.16(24)
数学的帰納法 A2.7(104)
数値実験 A4.2(193)
数直線 A1.1(2)
数列 A2.1(96)
——の定義 A2.1(96)
——の記号 A2.1(96)
——の和 A2.6(103)
——の和を求める原理 A2.6(104)
垂心 A3.2(160)
整式 A1.8(8)
整数解
方程式の——
A1.E2〜4(35〜37)
接弦定理 A3.1(158)

絶対値(実数の)　A1.4(4)
絶対不等式　A1.15(20)
最大・最小と——　A1.15(22)
漸化式　A2.8(106)
——の概念　A2.8(106)
——の定義　A2.8(107)
線型３項間——　A2.8(111)
線型——の解法　C.10，C.11
C.12
定数係数線型
２項間——　A2.8(108)
連立線型——　A2.8(111)
線型漸化式の解法　C.10(267)
C.11(268)，C.12(269)
全称命題　A1.16(27)
全体集合　A1.16(23)
素　☞互いに素
相加平均　A1.15(21)
相似
——条件(三角形の)　A3.1(156)
——変換　A3.5(167)
相乗平均　A1.15(21)
素数　A4.2(204)

た

対偶　A1.18(31)
対称移動　A3.5(166)
対称式　A1.8(9)，C.1(254)
基本——　A1.8(9)
代入法　C.2(257)
互いに素　A1.E1(34)
多項式　A1.8(8)
多項定理　B.237
単項式　A1.8(8)
チェバの定理　A3.2(159)，B.303
——の逆　A3.2(159)，B.304
中点連結定理　A3.1(157)，B.301
調和数列　C.7(264)，ルポ(154)
定数数列　A2.1(96)
等差数列　A2.2(97)
——の一般項と和　A2.2(97)
等差数列と等比数列　C.6(263)
同値(条件の)　A1.17(30)
同値変形
連立方程式の——
☞加減法，代入法
等比数列　A2.3(99)
——の一般項と和　A2.3(99)
特称命題　A1.16(27)

な

内心　A3.2(160)
２項係数　A2.9(113)
２項定理　A2.9(114)
二重根号　A1.7(8)
入出力　A4.1(186)

は

倍数　A1.9(10)，A1.E1(34)
背理法　A1.18(32)
配列変数　A4.2(199)
パスカルの三角形　A2.9(112)
繁分数式　A1.12(15)
反例　A1.16(27)
必要十分条件　A1.17(30)

必要条件　A1.17(29)
否定　A1.16(25)
ファイル　A4.1(186)
フィボナッチ数列　A2.8(107)
フェルマー点　B.313
不等式
——の基本性質　A1.14(19)
プログラミング練習　A4.2(188)
プログラム実行・制御　A4.1(187)
分数式　A1.12(14)
——の四則　A1.12(15)
分配法則
実数についての——　A1.3(4)
整式についての——　A1.13(16)
分母の有理化　A1.7(7)
平均
——を求めるプログラム
A4.2(198)
平行移動　A3.5(166)
平行線と線分の比　A3.1(156)
BASIC の基本用語　A4.1(186)
平方根　A1.6(7)
べき　A1.5(6)
ベルヌイの不等式　A2.7(105)
変換
図形の——　A3.5(166)
方程式の整数解　A1.E2(35)
A1.E3(36)，A1.E4(37)
方べきの定理　A3.4(164)

ま

末項　A2.1(97)
無限小数　A1.2(3)
無限数列　A2.1(97)
無理数　A1.1(2)
命題　A1.16(23)
メネラウスの定理 A3.3(161), B.307
——の逆　A3.3(162)，B.308

や

約数　A1.9(10)，A1.E1(34)
約数と倍数　C.4(259)
約分と通分の原理　A1.12(14)
ユークリッドの互除法☞互除法
有限小数　A1.2(3)
有限数列　A2.1(97)
有理化　☞分母の有理化
有理式　A1.12(14)
有理数　A1.1(2)

ら

累乗　A1.5(6)
連続 2 整数の積の和　A4.2(194)
連立方程式の同値変形　C.2(256)
論証　A1.18(31)

わ

和
奇数列の——　A4.2(190)
自然数の累乗の——　A2.5(102)
規則的に並んだ数の——
A4.2(188)
和分　☞差分と和分

著者の先生方の横顔

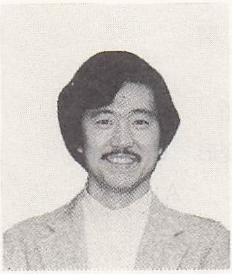
藤田　宏（ふじた　ひろし）



明治大学理工学部教授，東京大学理学部名誉教授

学生時代にすでに数学教育の重要性を認識，本書の前身「東大への数学」を執筆，日本数学会理事長，日本応用数理学会会長，東大理学部長などの研究教育・学術行政の要職の合間をぬって，数学教育国際委員会日本代表，文部省教育課程審議会委員，数学オリンピック財団理事長なども歴任され，数学教育に関し国際的・国内的に活躍してこられました．

長岡亮介（ながおかりょうすけ）



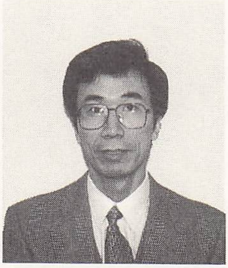
大東文化大学法学部教授

「東大に入って最も良かったことの１つは藤田宏先生にめぐりあえたこと」ということで，「大学への数学」との出会いも，藤田ゼミ時代．技術的数学に飽きたらず，その意味を求めて「数学史と数学教育にさまよい込んだ」ということで，今では「趣味は数学教育」だそうです．

東大や早大でも講義をなさっているので，先輩たちには，先生に習った人もいるかもしれませんよ！

長崎憲一（ながさきけんいち）

千葉工業大学工学部教授



明快な関数解析の講義に引かれて藤田ゼミを選び，初めて非線形微分方程式論と出会って以来，現在までその研究を続けていらっしゃいます．

先生の目標は，研究面だけでなく，大学において数学をわかりやすく教えるという点でも，藤田先生に近づくこととのことです．そのためにも，高校数学の実状を再確認できた本書のための仕事は非常に有益だったそうです．

長岡恭史（ながおかやすふみ）

駿台予備学校教科専任講師



大学を出て，最初は，駿台甲府高校で教えていらっしゃったのですが，いまは有名な「スンダイ」の先生です．若い情熱と誠実な教え方で，生徒の信頼と尊敬を集めていらっしゃいます。

受験指導の現場を数多く経験した立場から“使いやすく”“わかりやすい”「大学への数学」のために多くの提案を出して頂きました．なお，先生は長岡亮介先生の弟さんです．

◇◇◇ 研文書院 編集部より ◇◇◇

新課程

大学への数学Aニューアプローチ

著者　藤田　宏　長岡亮介
長崎憲一　長岡恭史

発行者　飯塚　潤

発行所　株式会社　研文書院

〒166　東京都杉並区成田東3-6-3
TEL　03(3312)9033
FAX　03(3312)8541
振替口座　00130-0-56451

印刷　大成舎　製本　伸光堂

ISBN4-7680-1058-X

ISBN4-7680-1058-X C7341 P1900E
定価 1900円(本体 1845円)